

DS 10 – Maths & Info

Corrigé

Exercice 1. Questions de cours

Cf cours...

Exercice 2. Variables aléatoires

1. On doit nécessairement greffer tous les rosiers la première semaine, donc R_1 est la variable aléatoire certaine de valeur r . Ainsi, $\mathbb{E}(R_1) = r$ et $\mathbb{V}(R_1) = 0$.

Le deuxième semaine, les rosiers à greffer correspondent aux rosiers dont la greffe n'a pas pris la semaine 1. On compte donc le nombre de "succès" dans l'épreuve de Bernoulli où un succès correspond à une greffe qui ne prend pas. Ces épreuves de Bernoulli sont indépendantes, sont toutes de paramètre $1 - p$, et sont au nombre de r . Ainsi, R_2 suit une loi binomiale de paramètres $r, 1 - p$: $R_2 \hookrightarrow \text{Bin}(r, 1 - p)$.

On en déduit que $\mathbb{E}(R_2) = r(1 - p)$ et que $\mathbb{V}(R_2) = r(1 - p)p$.

2. a) Dans le meilleur des cas, la greffe rapide prend dès la première tentative. Dans le pire des cas, on est obligé d'effectuer une greffe normale la semaine $N + 1$, et celle-ci prend nécessairement. Ainsi, l'univers image de G_k est $G_k(\Omega) = \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$.

Déterminons la loi de G_k . Pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, l'événement $(G_k = i)$ correspond à l'événement : "les $i - 1$ premières greffes échouent et la i -ème réussit".

Comme les greffes sont indépendantes (successives), cette probabilité vaut $\mathbb{P}(G_k = i) = (1 - p)^{i-1} \times p$.

Pour $i = N + 1$, comme la greffe normale réussit nécessairement, l'événement $(G_k = N + 1)$ correspond à l'événement : "les N premières greffes échouent toutes".

Par indépendance, on obtient : $\mathbb{P}(G_k = N + 1) = (1 - p)^N$.

Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$:
$$\mathbb{P}(G_k = i) = \begin{cases} (1 - p)^{i-1} p & \text{si } i \leq N \\ (1 - p)^N & \text{si } i = N + 1 \end{cases}$$

- b) On sait que $\mathbb{P}(G_k \leq N + 1) = 1$. Soit $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$. On a :

$$\mathbb{P}(G_k \leq j) = \sum_{i=1}^j \mathbb{P}(G_k = i) = \sum_{i=1}^j (1 - p)^{i-1} p = p \sum_{i=0}^{j-1} (1 - p)^i.$$

Ainsi, d'après la formule des sommes géométriques :

$$\mathbb{P}(G_k \leq j) = p \frac{1 - (1 - p)^j}{1 - (1 - p)} = 1 - (1 - p)^j.$$

Autre méthode : l'événement complémentaire $G_k > j$ correspond à l'événement "aucune des j premières greffes ne prend", qui est donc de probabilité $(1 - p)^j$ par indépendance.

3. On s'intéresse désormais à l'ensemble des rosiers, et on note S le nombre de semaines avant que l'ensemble des greffes aient prises.

- a) Le nombre de semaines pour avant que tous les rosiers n'aient pris est égal au nombre de semaine nécessaire pour le rosier qui prend le plus de temps.

On a donc $S = \max(G_1, \dots, G_r)$ et $\Omega(S) = \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$.

b) Soit $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S \leq j) &= \mathbb{P}(\max(G_1, \dots, G_r) \leq j) \\ &= \mathbb{P}((G_1 \leq j) \cap (G_2 \leq j) \cap \dots \cap (G_r \leq j)) \\ &= \prod_{k=1}^r \mathbb{P}(G_k \leq j) && \text{par indépendance des rosiers} \\ &= \left(1 - (1 - p)^j\right)^r && \text{d'après la question 2b} \end{aligned}$$

Enfin, $\mathbb{P}(S \leq N + 1) = 1$ puisque $S(\Omega) = \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$.

c) On a $\mathbb{P}(S = 1) = \mathbb{P}(S \leq 1) = (1 - (1 - p)^1)^r = p^r$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\mathbb{P}(S = j) = \mathbb{P}(S \leq j) - \mathbb{P}(S \leq j - 1) = (1 - (1 - p)^j)^r - (1 - (1 - p)^{j-1})^r$.

Enfin, on a $\mathbb{P}(S = n + 1) = 1 - \mathbb{P}(S \leq N) = 1 - \left(1 - (1 - p)^N\right)^r$.

4. a) Soit $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$. On sait que $\mathbb{P}(G_k = N + 1) = (1 - p)^N$, donc la variable aléatoire indicatrice associée suit une loi de Bernoulli de paramètre $(1 - p)^N$.
- b) Y correspond à la somme des variable aléatoires ci-dessus, qui sont toutes des variables de Bernoulli de paramètre $(1 - p)^N$, et qui sont indépendantes. Ainsi, Y suit la loi binomiale de paramètres r et $(1 - p)^N$.

Exercice 3. Quelques endomorphismes nilpotents

Les parties sont **entièrement indépendantes**.

A) Un exemple en dimension 2

1. Soient $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux vecteurs de \mathbb{R}^2 . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y')$, donc :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (2(\lambda x + x') - 4(\lambda y + y')) \quad , \quad \lambda x + x' - 2(\lambda y + y') \\ &= (2\lambda x + 2x' - 4\lambda y - 4y') \quad , \quad \lambda x + x' - 2\lambda y - 2y') \\ &= (\lambda(2x - 4y) + 2x' - 4y') \quad , \quad n\lambda(x - 2y) + x' - 2y') \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Ainsi, l'application f est bien linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 : c'est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .

2. On a $f(1, 0) = (2, 1) = 2(1, 0) + 1(0, 1)$, et $f(0, 1) = (-4, -2) = -4(1, 0) - 2(0, 1)$.

Ainsi, la matrice de f dans les bases canoniques est $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$.

Ainsi, f^2 est l'endomorphisme nul de \mathbb{R}^2 : $f^2 = 0$.

4. On sait que $\text{Im}(f) = \text{Vect}((2, 1), (-4, -2)) = \text{Vect}(2, 1)$ puisque $(-4, -2) = -2(2, 1)$.

Ainsi, $\text{Im}(f)$ est de dimension 1, et une base en est $((2, 1))$.

D'autre part, pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ si et seulement si $2x - 4y = x - 2y = 0$, donc

si et seulement si $x = 2y$.

On en déduit que $\ker(f) = \{(2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((2, 1))$: $\ker(f)$ est de dimension 1 et une base en est également $((2, 1))$.

5. Soit $u = (3, 1)$. $f(u) = (6 - 4, 3 - 2) = (2, 1)$ et donc u et $f(u)$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, la famille $\mathcal{B} = (u, f(u))$ est une famille libre à deux éléments de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 , qui est de dimension 2 : on en déduit qu'il s'agit bien d'une base de \mathbb{R}^2 .
6. On a $f(u) = f(u)$ et $f(f(u)) = 0$, donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

B) Un exemple en dimension 3

1. On a $J \times J = 0_3$ (produit matriciel), donc $g \circ g = 0$.
2. On a $(-1, -2, 1) = -(1, 2, -1)$, et donc $\text{Im}(g) = \text{Vect}((-1, -2, 1), (1, 2, -1), (1, 2, -1)) = \text{Vect}((1, 2, -1))$.

Ainsi, l'image de g est la droite vectorielle engendrée par $(1, 2, -1)$.

De plus, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $J \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff -x + y + z = 0$, et donc $\ker(f) =$

$\{(y + z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$.

Ces deux vecteurs sont non colinéaires, donc $\ker(f)$ a pour base $((1, 1, 0), (1, 0, 1))$.

3. La matrice associée à la famille \mathcal{B} est $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Le rang de cette matrice est égale à celui de la matrice où on a permuté les lignes et les

colonnes pour échelonner : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La famille \mathcal{B} est ainsi de rang 3, et comporte 3

vecteurs dans l'espace \mathbb{R}^3 qui est de dimension 3.

Il s'agit donc bien d'une base de \mathbb{R}^3 .

4. On a $J \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $g(e_1) = 0$.

De la même manière, on calcule $g(e_2) = 0$ et $g(e_3) = (1, 2, -1) = e_1$.

On en déduit que $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C) Un exemple dans $\mathbb{R}_3[X]$ - Bonus si vous avez fini

Cette partie est à faire à la maison

On définit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ par $\varphi(P) = P'(X + 1)$.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)'(X + 1) \\ &= (\lambda P' + Q') \circ (X + 1) && \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda P'(X + 1) + Q'(X + 1) \\ &= \lambda \varphi(P) + \varphi(Q) \end{aligned}$$

Ainsi, φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Si $\deg(P) \in \{-\infty, 0\}$, on a $P' = 0$ donc $\varphi(P) = 0$ et ainsi $\deg(\varphi(P)) = -\infty$.
Si $\deg(P) \in \{1, 2, 3\}$, on a $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
3. En particulier, pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a $\deg(\varphi(P)) \leq \deg(P) - 1$, et donc en itérant 4 fois :
 $\deg(\varphi^4(P)) \leq \deg(P) - 4 \leq 3 - 4 = -1$. La seule possibilité est d'avoir $\varphi^4(P) = 0$, et ce pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$.
4. On a $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 1$, $\varphi(X^2) = 2(X+1) = 2X+2$, et $\varphi(X^3) = 3(X+1)^2 = 3X^2+6X+3$.

Ainsi, la matrice de φ dans la base canonique est $Mat_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. On a $P_1 = 3X^2 + 6X + 3$ d'après la question précédent.
Ainsi, $P_2 = \varphi(P_1) = 6(X+1) + 6 = 6X + 12$.
Enfin, $P_3 = \varphi(P_2) = 6$.
La matrice associée à la famille (P_3, P_2, P_1, P_0) dans la base canonique est échelonnée de rang 4, donc \mathcal{C} est de rang 4.
Comme c'est une famille de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui est de dimension 4, on a bien une base de cet espace.
6. Puisque $\varphi(P_0) = P_1$, $\varphi(P_1) = P_2$, $\varphi(P_2) = P_3$ et $\varphi(P_3) = 0$, la matrice de φ dans cette

nouvelle base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$