

DS2 - Corrigé

Exercice 1 - Trigonométrie

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} - 3x \equiv -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{4} - 3x \equiv \frac{7\pi}{6} \pmod{2\pi} \end{cases} \quad \text{puisque } \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{5\pi}{12} \pmod{2\pi} \\ \text{ou} \\ 3x \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{6} \equiv -\frac{11\pi}{12} \pmod{2\pi} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv \frac{5\pi}{36} \pmod{\frac{2\pi}{3}} \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{11\pi}{36} \pmod{\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions réelles est

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{11\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2) a) On a un trinôme de discriminant :

$$D = \frac{4}{3} + 4 = \frac{4+12}{3} = \frac{16}{3} > 0. \text{ Donc il y a deux racines,}$$

$$\text{données par : } \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{16}{3}}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2\sqrt{3}} = \frac{1 \pm 2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Soit } -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et } \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Enfin, comme $a: 1 > 0$, le trinôme est négatif entre ses racines, donc : $\mathcal{S} =]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}[$.

b) L'équation est bien définie lorsque $\tan(x)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ existent, soit lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $x + \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, i.e. $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Finalement le domaine d'existence est donc

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathcal{D}, \text{ on a } \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$$

Posez le changement de variable $y = \tan(x)$. Alors :

$$\tan(x) + \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) < \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y - \frac{1}{y} - \frac{2}{\sqrt{3}} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}y - 1}{y} < 0$$

Or d'après la question précédente,

on a le tableau de signe

y	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$y^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}y - 1$	+	0	-	0	+
y	-	-	0	+	+
...	-	0	+	0	+

Donc: $y \in]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[\cup]0, \sqrt{3}[$

$$\Leftrightarrow \tan(x) \in]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[\cup]0, \sqrt{3}[$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}[\cup]0, \frac{\pi}{3}[\text{ puisque } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\text{D'où: } \mathcal{Y} =]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}[\cup]0, \frac{\pi}{3}[$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la propriété:

$$"\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leq n |\sin(x)|"$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que P_n est vraie pour tout n .

Initialisation: P_0 . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|\sin(0x)| = |\sin(0)| = |0| = 0 \text{ et } 0x |\sin(x)| = 0.$$

Donc on a bien: $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(0x)| \leq 0 |\sin(x)|$.

P_0 est vraie.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie. Montrons que

P_{n+1} est vraie.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a:

$$|\sin((n+1)x)| = |\sin(nx+x)| = |\sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin(x)|$$

$$\leq |\sin(nx)| |\cos(x)| + |\cos(nx)| |\sin(x)| \text{ par l'égalité triangulaire}$$

$$\leq |\sin(nx)| + |\sin(x)| \text{ puisque } \cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$$

$$\leq n |\sin(x)| + |\sin(x)| \text{ par hypothèse de récurrence}$$

$$\leq (n+1) |\sin(x)|$$

D'où l'hérédité. Ainsi, on a bien montré par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leq n |\sin(x)|$

Exercice 2

1) Il n'y a aucune contrainte particulière: f est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$$2) \cdot f(-\frac{\pi}{2}) = 0^4 + 2 \times (-1) \times 0 - (-1)^4 = -1$$

$$\cdot f(\frac{5\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2})^4 + 2 \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) - (-\frac{\sqrt{2}}{2})^4 \\ = \frac{4}{16} + 1 - \frac{4}{16} = 1$$

$$\cdot f(\frac{\pi}{6}) = (\frac{\sqrt{3}}{2})^4 + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - (\frac{1}{2})^4 \\ = \frac{9}{16} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x + 2 \sin x \cos x \\ = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin(2x) \\ = \cos(2x) \times 1 + \sin(2x)$$

$$f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$$

4) Cherchons $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2x) + \sin(2x) = r \cos(2x + \varphi).$$

On sait que $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\text{De plus, } \cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin(\varphi) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Donc } \varphi = -\frac{\pi}{4} \text{ convient.}$$

$$\text{Ainsi: } \forall x \in \mathbb{R}, \boxed{f(x) = \sqrt{2} \cos(2x - \frac{\pi}{4})}.$$

5) On a donc : $f(-\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} \cos(-\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1$

$$\bullet f(\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(\frac{9\pi}{4}) = \sqrt{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1$$

$$\bullet f(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{12})$$

$$\text{On sait que } f(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \text{ donc:}$$

$$\boxed{\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{3})(\sqrt{2})}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

6) L'image de $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 2x - \frac{\pi}{4}$ est $\mathbb{R}$,

$$\text{et } \cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]. \text{ Ainsi } \boxed{f(\mathbb{R}) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]}.$$

7) Montrons que f est π -périodique. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\underline{f(x+\pi)} = \sqrt{2} \cos(2(x+\pi) - \frac{\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2} \cos(2x + 2\pi - \frac{\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2} \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \underline{f(x)}.$$

Donc f est bien périodique, et une période en est

$$\boxed{T = \pi \in]0, 2\pi[}.$$

8) On réalise successivement :

1. Une dilatation horizontale de facteur 2 ($x \mapsto 2x$)

2. Une translation horizontale de $\frac{\pi}{4}$ ($x \mapsto (2x) - \frac{\pi}{4}$)

3. Une dilatation verticale de facteur $\sqrt{2}$.

9) $f(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} \cos(0) = \sqrt{2}$, et $f(\frac{3\pi}{8}) = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \underline{f'(x) = -2\sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})}. \text{ Ainsi:}$$

$$f'(\frac{\pi}{8}) = -2\sqrt{2} \sin(0) = 0 \text{ et } f'(\frac{3\pi}{8}) = -2\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{2}) = -2\sqrt{2}$$

Don les équations des tangentes :

• en $\frac{\pi}{8}$: $y = \sqrt{2}$

• en $\frac{3\pi}{8}$: $y = -2\sqrt{2}(x - \frac{3\pi}{8})$

Exercice 3 - Étude d'une fonction

1) On doit avoir $x+1 \neq 0$ ($x \neq -1$) et :

$$\frac{x-1}{x+1} > 0, \text{ c'est-à-dire } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

D'où : $\mathcal{D} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

2) Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $-x \in \mathcal{D}$, et :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = \ln\left(\frac{-(x+1)}{-(x-1)}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\right) = -\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -f(x). \end{aligned}$$

f est donc impaire.

3) Pour tous $x \in \mathcal{D}$ et $m \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = m \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = m$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = e^m \text{ puisque exp est strictement croissante}$$

$$\Leftrightarrow x-1 = e^m(x+1) \quad (x+1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x-1 = xe^m + e^m$$

$$\Leftrightarrow x - xe^m = e^m + 1$$

$$\Leftrightarrow x(1-e^m) = e^m + 1$$

→ Si $m=0$, alors $1-e^m=0$ et $e^m+1=2$, donc l'équation devient $x \cdot 0 = 2$, qui n'a pas de solution.

→ Si $m \neq 0$, alors $1-e^m \neq 0$, et l'équation devient :

$$x = \frac{e^m + 1}{1 - e^m}.$$

En résumé :

$$\begin{cases} \text{Si } m=0, \text{ alors } \mathcal{S} = \emptyset \\ \text{Si } m \neq 0, \text{ alors } \mathcal{S} = \left\{ \frac{e^m + 1}{1 - e^m} \right\} \end{cases}$$

4) Tout $m \in \mathbb{R}$ a au plus un antécédent par f , donc f est injective. Cependant, 0 n'a pas d'antécédent par f , donc f n'est pas surjective.

5) Ainsi, la restriction $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^*$ est injective

et surjective, donc elle est bijective, et sa réciproque est :

$$g^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ y \mapsto \frac{1+e^y}{1-e^y} \end{cases}$$

Exercice 4 - Modélisation Python

1) `def population(n):`
 `pop = 50 000`
 `for i in range(n):`
 `pop = pop + pop * 0.05 * (1 - pop / 150000)`
 `return pop`

2) Il faut alors écrire l'instruction:

`print(population(19*12))` car 19 ans = 19*12 mois

3) `n = 0`
`while population(n) < 120 000:`
 `n = n + 1`
 `print(n)`

Exercice 5 - Problème

1) a) `def moy-arith(a,b):`
 `return (a+b)/2`

b) `from math import sqrt`

c) `def moy-geom(a,b):`
 `if a < 0 or b < 0:`
 `print("Les paramètres doivent être positifs!")`
 `else:`
 `return sqrt(a*b)`

2) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$.

$a \geq 0$ et $b \geq 0$ donc $\frac{a+b}{2} \geq 0$ et $\sqrt{ab} \geq 0$

$$\text{De plus : } (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b^2 \\ = a - 2\sqrt{ab} + b$$

et $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, donc $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$

Ainsi, $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, et donc

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}$$

D'où : $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, 0 \leq m(a,b) \leq M(a,b)$

3) `def MAG(a,b):`

`u = a`
 `v = b`
 `while v - u > 10**(-5):`
 `u, v = moy-geom(u,v), moy-arith(u,v)`
 `return (u,v)`

4) a) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n la propriété : " $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$ "

Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I : On a $0 \leq a \leq b$, donc $0 \leq u_0 \leq v_0$

De plus, $\frac{a+b}{2} \leq \frac{b+b}{2} = b$ et $\sqrt{ab} \geq \sqrt{aa} = a$, donc ;

d'après la question 2 : $a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b$.

On a bien $u_0 \leq u_1 \leq v_1 \leq v_0$, donc P_0 est bien vraie.

H: Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie: on sait que
 $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$.

Montrons que P_{n+1} est vraie ($u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq v_{n+2} \leq v_{n+1}$).

Comme $0 \leq u_{n+1} \leq v_{n+1}$ par hypothèse de récurrence, on sait que
 $\frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} \leq \frac{v_{n+1} + v_{n+1}}{2} = v_{n+1}$

$$\text{et } \sqrt{u_{n+1}v_{n+1}} \geq \sqrt{u_{n+1}u_{n+1}} = u_{n+1}.$$

De plus, $\sqrt{u_{n+1}v_{n+1}} \leq \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2}$ selon la question 2.

D'où finalement: $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq v_{n+2} \leq v_{n+1}$.

C'est l'hérédité.

En conclusion, par principe de récurrence, on a bien:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n.$$

b) $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc (u_n) est croissante.

$v_{n+1} \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc (v_n) est décroissante.

c) Soient $p, q \in \mathbb{N}$

Si $p \leq q$, on a: $u_p \leq u_q$ car (u_n) est croissante
 $\leq v_q$ selon la question 4a.

Si $p > q$, on a $u_p \leq v_p$ selon la question 4a.
 $\leq v_q$ car (v_n) est décroissante.

Dans tous les cas, $u_p \leq v_q$

5) a) U est nonvide ($u_0 \in U$) et majorée par v_0 selon la question précédente, donc il admet un sup.

V est nonvide ($v_0 \in V$) et minorée par u_0 (idem), donc il admet un inf.

D'où l'existence de $l = \sup U$ et $l' = \inf V$

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$u_p \leq v_q$, donc u_p minore V . Ainsi,

$u_p \leq l'$, puisque l' est le plus grand des mineurs de V .

On a donc que l' majore U , et donc $l \leq l'$ puisque l est le plus petit des majorants de U .

D'où $l \leq l'$

c) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n la propriété: $0 \leq d_n \leq \frac{b-a}{2^n}$.

I $0 \leq a \leq b$, donc $0 \leq b-a = \frac{b-a}{2^0}$: P_0 est bien vraie.

II. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie. Montrons P_{n+1} .

On a $0 \leq d_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_n - u_n$ par croissance de (u_n)

$$\text{Or } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \text{ donc } v_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{d_n}{2}.$$

$$\text{D'où } d_{n+1} \leq \frac{d_n}{2} \leq \frac{b-a}{2 \times 2^n} = \frac{b-a}{2^{n+1}} \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

D'où l'hérédité.

On a bien montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq d_n \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

1) (On en déduit que $d_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$).

Si par l'absurde $l \neq l'$, alors $l < l'$ (par 5b).

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l < l' \leq v_n$, et

$$\text{donc : } \underline{d_n = v_n - u_n \geq l' - l > 0}$$

Il suffit de trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{b-a}{2^n} < l' - l$ pour arriver à une contradiction.

(Par exemple : $n = \lfloor \log_2 \left(\frac{b-a}{l'-l} \right) \rfloor + 1 \dots$).

C'est absurde, donc $\underline{l = l'}$.

