

DS3 - Maths - Corrigé

1/10

Exercice 1 -

1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $z \times \bar{z} = |z|^2$ et $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$.

2) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \end{aligned}$$

D'où : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2$

3) $(|z_1 + z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$. Or $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1||z_2| = |z_1||z_2|$.

Exercice 2 -

D'où l'inégalité triangulaire. (à travailler un peu plus).

1) On a $z_1 = 4\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = 4\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$
 $= 4\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{8}{2} - \frac{8i}{2} = 4 - 4i$

Donc la forme algébrique de z_1 est $z_1 = 4 - 4i$

De plus, si on cherche $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z_2 = re^{i\theta}$, on sait que :

• $r = |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

• $\cos \theta = \frac{-1}{r} = -\frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{-\sqrt{3}}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = -\frac{2\pi}{3}$ convient.

Ainsi, la forme exponentielle de z_2 est $z_2 = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

2) D'une part, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-4i}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{(4-4i)(-1+i\sqrt{3})}{(-1-i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})} = \frac{-4+4i\sqrt{3}+4i-4i^2\sqrt{3}}{(-1)^2 - \sqrt{3}^2 i^2}$
 $= \frac{-4+4\sqrt{3}+4i(\sqrt{3}+1)}{1+3} = \frac{-4+4\sqrt{3}+4i(\sqrt{3}+1)}{4} = \underline{\underline{(\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)}}$

La forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$ est donc : $\frac{z_1}{z_2} = (\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)$

D'autre part, on a $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{2i\frac{\pi}{3}}} = 2\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = 2\sqrt{2}e^{i(-\frac{3\pi}{12} + \frac{8\pi}{12})}$
 $= 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

La forme exponentielle de $\frac{z_1}{z_2}$ est donc : $\frac{z_1}{z_2} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

3) On a $\frac{z_1}{z_2} = 2\sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12})) = 2\sqrt{2}\cos(\frac{5\pi}{12}) + i2\sqrt{2}\sin(\frac{5\pi}{12})$.

D'où $\operatorname{Re}(\frac{z_1}{z_2}) = 2\sqrt{2}\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\operatorname{Im}(\frac{z_1}{z_2}) = 2\sqrt{2}\sin(\frac{5\pi}{12})$.

Mais d'après la question précédente : $\operatorname{Re}(\frac{z_1}{z_2}) = \sqrt{3}-1$ et $\operatorname{Im}(\frac{z_1}{z_2}) = \sqrt{3}+1$.

On a donc $2\sqrt{2}\cos(\frac{5\pi}{12}) = \sqrt{3}-1$ et $2\sqrt{2}\sin(\frac{5\pi}{12}) = \sqrt{3}+1$.

D'où finalement :

$\cos(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 3 -

1) L'unique contrainte est $x^2 \neq 0$, puisque $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, le domaine de définition de f_a est $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$.

2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$a-x \leq b-x$, donc $\frac{a-x}{x^2} \leq \frac{b-x}{x^2}$ puisque $x^2 > 0$.

Ainsi, par stricte croissance de la fonction exponentielle : $f_a(x) \leq f_b(x) \forall x \in \mathcal{D}$.

La courbe représentative de f_a sera donc en-dessous de celle de f_b .

3) Soit $a \in \mathbb{R}$. $x \mapsto \frac{a-x}{x^2}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme quotient. Comme $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, l'application f_a est donc bien dérivable sur $\mathcal{D}$.

On a: $\forall x \in \mathbb{D}, f_a'(x) = \frac{-1x(x^2) - 2x(a-x)}{(x^2)^2} x \exp\left(\frac{a-x}{x^2}\right)$

$$= \frac{-x^2 - 2ax + 2x^2}{x^4} \exp\left(\frac{a-x}{x^2}\right)$$

$$= \frac{x^2 - 2ax}{x^4} \exp\left(\frac{a-x}{x^2}\right) = \frac{x(x-2a)}{x \times x^3} \exp\left(\frac{a-x}{x^2}\right)$$

D'où: $\forall x \in \mathbb{R}^*, f_a'(x) = \frac{x-2a}{x^3} \exp\left(\frac{a-x}{x^2}\right)$

A - Cas $a=0$

4) f_0 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f_0(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ et $f_0'(x) = \frac{x-2 \times 0}{x^3} \exp\left(\frac{0-x}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) > 0$

• Donc f_0 est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $\mathbb{R}^{*-}$.

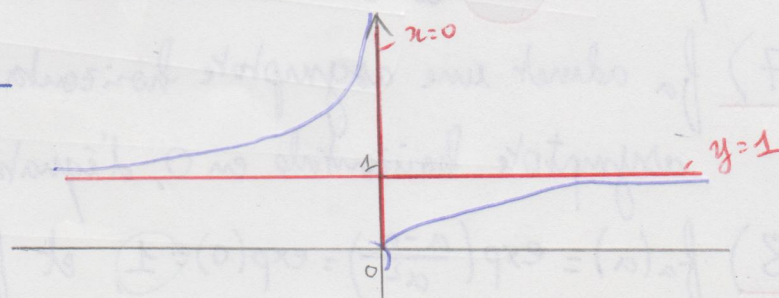
• Limites: On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{x} = 0$, donc par composition avec la fonction continue exponentielle: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_0(x) = e^0 = 1$.

De même, $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\frac{1}{x}) = +\infty & \text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} f_0(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\frac{1}{x}) = -\infty & \text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) = +\infty \end{cases}$

D'où le tableau de variations:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_0'(x)$	+	$\parallel$	+
$f_0(x)$	$\nearrow$ 1	$\begin{matrix} +\infty \\ \parallel \\ 0 \end{matrix}$	$\nearrow$ 1

On a une asymptote horizontale en $\pm\infty$ d'équation $y=1$ et une asymptote verticale en 0^- d'équation $x=0$.



Allure de la courbe:

B - Cas $a > 0$

4/10

5) On a: $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f_a'(x) = \frac{x-2a}{x^3} \exp\left(\frac{a-x}{x^2}\right)$.

$$\text{Or } \forall x \in \mathbb{R}^*: \begin{cases} \exp\left(\frac{a-x}{x^2}\right) > 0 \\ x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \\ x-2a > 0 \Leftrightarrow x > 2a \end{cases}$$

Comme $2a > 0$, le tableau de variations est le suivant:

x	$-\infty$	0	$2a$	$+\infty$
x^3	-	0	+	+
$x-2a$	-	-	0	+
$f_a'(x)$	+	-	0	+
$f_a(x)$	1	$+\infty$	$e^{-\frac{1}{4a}}$	1

$$f(2a) = \exp\left(\frac{a-2a}{4a^2}\right) = \exp\left(\frac{-1}{4a}\right)$$

• Limites: $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{a-x}{x^2} = x \left(\frac{a}{x} - 1 \right) = \frac{a}{x} - 1$

Donc par opérations, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a-x}{x^2} = 0$. D'où, par composition avec l'exponentielle:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_a(x) = 1$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a-x}{x^2} = +\infty$ puisque $a-0 = a > 0$. D'où: $\lim_{x \rightarrow 0} f_a(x) = +\infty$.

6) $\lim_{x \rightarrow 0} f_a(x) = +\infty$ donc f_a ne peut pas être majorée. Par contre, elle est à valeurs (strictement) positives donc elle est minorée par 0.

Enfin, $e^{-\frac{1}{4a}} < 1$ puisque $-\frac{1}{4a} < 0$, donc le ~~minimum~~ f_a admet un minimum qui vaut $e^{-\frac{1}{4a}}$ est atteint en $x = 2a$. Elle n'a pas de maximum et n'est pas bornée.

7) f_a admet une asymptote horizontale en $\pm\infty$, d'équation $y = 1$, et une asymptote horizontale en 0, d'équation $x = 0$.

8) $f_a(a) = \exp\left(\frac{a-a}{a^2}\right) = \exp(0) = 1$ et $f_a'(a) = \frac{a-2a}{a^3} \exp(0) = \frac{-a}{a^3} = \frac{-1}{a^2}$.

D'où l'équation de la tangente à la courbe en a : $y = -\frac{1}{a^2}(x-a) + 1 = -\frac{1}{a^2}x + \left(1 + \frac{1}{a}\right)$.

C - Cas a < 0

5/16

9) Il s'agit de montrer que dans ce cas, f_a admet une limite réelle en 0. On a $a-0=a<0$, donc par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a-x}{x^2} = -\infty$.

Ainsi, en composant avec l'exponentielle : $\lim_{x \rightarrow 0} f_a(x) = 0$.

f_a ne peut donc pas admettre d'asymptote verticale.

10) On a encore $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_a(x) = 1$ pour les mêmes raisons.

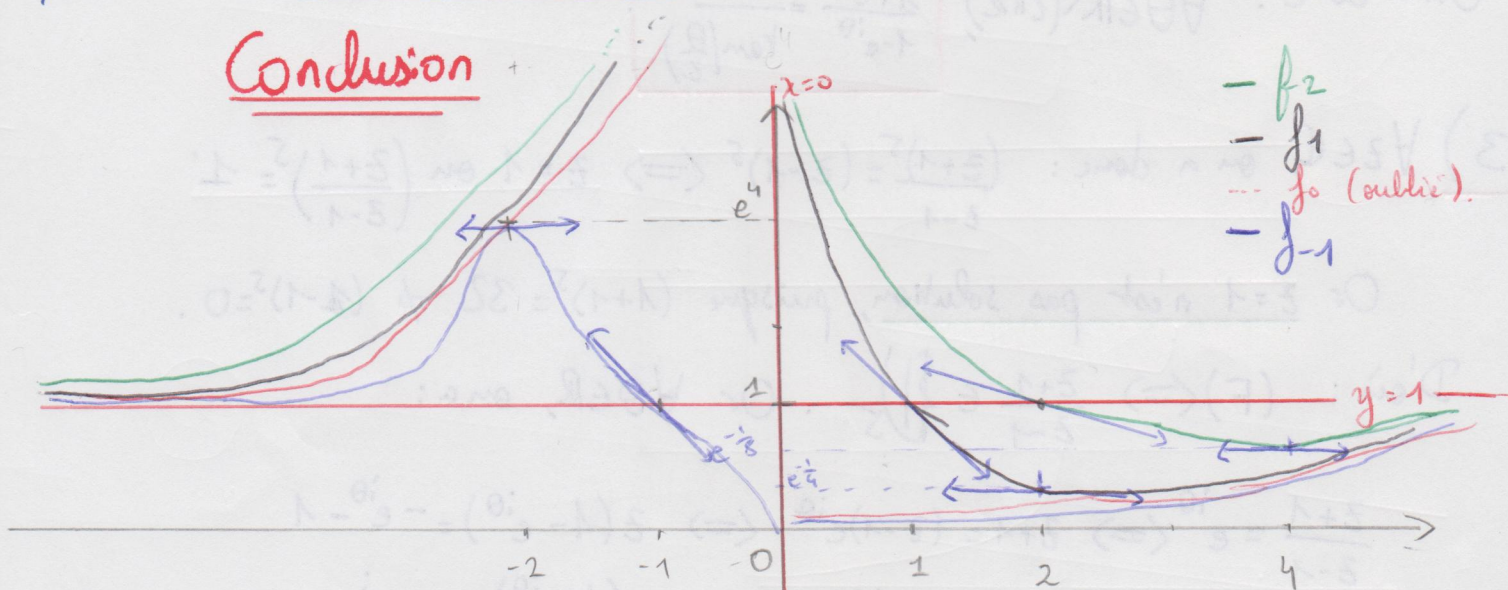
Ici: $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'_a(x) = \frac{x-2a}{x^3} \exp\left(\frac{a-x}{x^2}\right)$ où $\begin{cases} x-2a \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2a \\ x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \end{cases}$

Mais $2a < 0$, donc le tableau de variations devient :

x	$-\infty$	$2a$	0	$+\infty$
$x-2a$	-	0	+	+
x^3	-	-	0	+
$f'_a(x)$	+	0	-	+
f_a	1	$e^{-\frac{1}{4a}}$	0	1

où $f_a(2a) = \exp\left(-\frac{1}{4a}\right)$ de nouveau.

Conclusion



NB: L'emplacement de e^4 n'est pas réaliste. En fait, $e > 2$ donc $e^4 > 2^4 = 16 \dots$
On a même $e^4 \approx 54.6$!!

Exercice 4 - 2 Méthodes pour calculer $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Partie I

1) $\forall r > 0, \forall \theta \in [0, 2\pi[$, on a : $(re^{i\theta})^5 = 1 \Leftrightarrow r^5 e^{5i\theta} = e^{i0}$

(par unicité de la forme exponentielle)

$$\Leftrightarrow r^5 = 1 \text{ et } 5\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

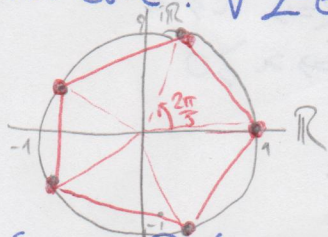
$$\Leftrightarrow r = 1 \text{ et } \theta \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{5}}$$

$$\Leftrightarrow r = 1 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{2k\pi}{5} \Leftrightarrow r = 1 \text{ et } \exists \theta \in [0, 4], \theta = \frac{2k\pi}{5}$$

puisque $\theta \in [0, 2\pi[$.

On a donc : $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$z^5 = 1 \Leftrightarrow z \in \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}} \right\} =: \mathbb{U}_5$$



2) Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$. On a : $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})} = \frac{2\cos(\frac{\theta}{2})}{2i\sin(-\frac{\theta}{2})}$

D'où $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{-i\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{i\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{i}{\tan(\frac{\theta}{2})}$ (puisque $\tan(\frac{\theta}{2}) = \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$).

On a donc : $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z}), \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{i}{\tan(\frac{\theta}{2})}$

3) $\forall z \in \mathbb{C}$, on a donc : $\frac{z+1}{z-1} = (z-1)^5 \Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1$

Or $z = 1$ n'est pas solution, puisque $(1+1)^5 = 32 \neq (1-1)^5 = 0$.

D'où : $(F) \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U}_5$. Or $\forall \theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{z+1}{z-1} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z+1 = (z-1)e^{i\theta} \Leftrightarrow z(1-e^{i\theta}) = -e^{i\theta}-1$$

Donc $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi\mathbb{Z}\}$, $\frac{z+1}{z-1} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{-(1+e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}} = \frac{-i}{\tan(\frac{\theta}{2})}$.

D'où : $\forall \theta \in \left\{ \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5} \right\} : \frac{z+1}{z-1} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{-i}{\tan(\frac{\theta}{2})}$. Et pour $\theta = 0$:

$$\frac{z+1}{z-1} = 1 \Leftrightarrow z+1 = z-1 \Leftrightarrow 1 = -1 : \text{c'est impossible.}$$

Finalement: $(F) \Leftrightarrow z = \frac{-i}{\tan(\frac{\pi}{5})} \text{ ou } z = \frac{-i}{\tan(\frac{2\pi}{5})} \text{ ou } z = \frac{-i}{\tan(\frac{3\pi}{5})} \text{ ou } z = \frac{-i}{\tan(\frac{4\pi}{5})}.$

4) On a, $\forall z \in \mathbb{C}$: $(z+1)^5 = z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1$

$$(z-1)^5 = z^5 + 5z^4(-1) + 10z^3(-1)^2 + 10z^2(-1)^3 + 5z(-1)^4 + (-1)^5$$

$$= z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10z^2 + 5z - 1$$

D'où: $(z+1)^5 = (z-1)^5 \Leftrightarrow 5z^4 + 10z^2 + 1 = -5z^4 - 10z^2 - 1$

$$\Leftrightarrow 10z^4 + 20z^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5z^4 + 10z^2 + 1 = 0$$

On a bien $(F) \Leftrightarrow (F')$

5) En posant le changement de variable $z^2 = y$, on a: $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$5z^4 + 10z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 + 10y + 1 = 0$$

qui est un polynôme de degré 2 avec pour discriminant $\Delta = 10^2 - 4 \times 5 \times 1 = 100 - 20 = 80 > 0$. On a donc

$$5z^4 + 10z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-10 \pm \sqrt{80}}{2 \times 5} \Leftrightarrow y = \frac{-10 \pm 4\sqrt{5}}{10} = \frac{-5 \pm 2\sqrt{5}}{5}$$

$$\Leftrightarrow z^2 = \frac{-5 \pm 2\sqrt{5}}{5}$$

Or $2\sqrt{5} < 5$ car $4 \times 5 = 20 < 5^2 = 25$. D'où $\frac{-5 \pm 2\sqrt{5}}{5} \neq 0$.

Ainsi, pour $z \in \mathbb{C}$, on a $z^2 = \frac{-5 \pm 2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow z = \pm i \sqrt{\frac{5 \pm 2\sqrt{5}}{5}}$

D'où les solutions de (F') et donc de (F) : $y = \left\{ i \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}, -i \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}, i \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}, -i \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \right\}$

6) On a $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, donc $0 < \tan(\frac{\pi}{5}) < \tan(\frac{2\pi}{5})$ et donc

$$0 < \frac{1}{\tan(\frac{2\pi}{5})} < \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{5})}$$

Ainsi, on a nécessairement $\frac{1}{\tan(\frac{2\pi}{5})} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$ et $\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{5})} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$; puisque

$$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} < \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}. \text{ D'où finalement: } \tan(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{\frac{5}{5+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5(5-2\sqrt{5})}{5^2 - (2\sqrt{5})^2}} = \sqrt{\frac{5(5-2\sqrt{5})}{5}}$$

Et donc $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$

8/10

Partie II -

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(4x) = \operatorname{Re}(e^{i4x})$ où :

$$\begin{aligned} e^{i4x} &= (e^{ix})^4 = (\cos x + i \sin x)^4 = \cos^4 x + 4\cos^3 x i \sin x + 6\cos^2 x i^2 \sin^2 x + 4\cos x i^3 \sin^3 x + i^4 \sin^4 x \\ &= \cos^4 x + 4i\cos^3 x \sin x - 6\cos^2 x \sin^2 x - 4i\cos x \sin^3 x + \sin^4 x \end{aligned}$$

D'où $\cos(4x) = \operatorname{Re}(e^{i4x}) = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$

Comme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, on a $\sin^4 x = (1 - \cos^2 x)^2 = 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$, et :

$$\begin{aligned} \cos(4x) &= \cos^4 x - 6\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x \\ &= 2\cos^4 x - 8\cos^2 x + 6\cos^4 x + 1 - 2\cos^2 x \end{aligned}$$

D'où : $\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

2) On sait que $\cos\left(4 \times \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

D'où $-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(4 \times \frac{\pi}{5}\right) = 8\cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1$

Ainsi, $X = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ vérifie l'équation $-X = 8X^4 - 8X^2 + 1$, c'est-à-dire :

$8X^4 - 8X^2 + X + 1 = 0$. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est bien solution de (E).

3) On a $8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 1 = 8 \times \frac{1}{16} - 8 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.

Donc $\frac{1}{2}$ est bien solution de (E).

4) On a aussi $8 \times (-1)^4 - 8 \times (-1)^2 + (-1) + 1 = 8 - 8 - 1 + 1 = 0$, donc -1 est une autre solution évidente de (E). Ainsi, on peut écrire, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 8x^4 - 8x^2 + x + 1 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)(ax^2 + bx + c) \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ à déterminer} \\ &= \left(x^2 + x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c) = \left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c) \end{aligned}$$

On cherche alors $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$8x^4 - 8x^2 + x + 1 = (x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^4 + bx^3 + cx^2 + \frac{a}{2}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{2}x - \frac{a}{2}x^2 - \frac{b}{2}x - \frac{c}{2}$$

$$= ax^2 + (b + \frac{a}{2})x^3 + (c + \frac{b}{2} - \frac{a}{2})x^2 + (\frac{c}{2} - \frac{b}{2})x - \frac{c}{2}$$

Par identification, on cherche donc à résoudre le système (S):

$$\begin{cases} a = 8 \\ b + \frac{a}{2} = 0 \\ c + \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = -8 \\ \frac{c-b}{2} = 1 \\ -\frac{c}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Or (S)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = -\frac{a}{2} = -4 \\ c = -8 + \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = -8 + 4 + 2 = -2 \\ c - b = 2 + b = -2 \\ c = -2 \end{cases}$$

On a $(a, b, c) = (8, -4, -2)$ donc:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 8x^4 - 8x^2 + x + 1 = (x - \frac{1}{2})(x + 1)(8x^2 - 4x - 2)$$

Ce dernier trinôme a pour discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 8 \times (-2) = 16 + 64 = 80 > 0$

donc il a deux racines réelles, données par $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{80}}{2 \times 8} = \frac{4 \pm 4\sqrt{5}}{16}$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

D'où finalement, l'ensemble des solutions de (E):

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2}, -1, \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right\}$$

5) Comme $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{3}$, on a $\cos(0) > \cos(\frac{\pi}{5}) > \cos(\frac{\pi}{3})$:

$$1 > \cos(\frac{\pi}{5}) > \frac{1}{2}$$

Or $\frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$ ($\sqrt{5} > 1$), donc nécessairement, puisque $\cos(\frac{\pi}{5}) \in \mathcal{S}$:

$$\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

6) Comme $\frac{\pi}{5} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\sin(\frac{\pi}{5}) > 0$ et donc $\sin(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{1 - \cos^2(\frac{\pi}{5})}$

$$\text{D'où } \sin(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{1 - \frac{(1+\sqrt{5})^2}{16}} = \sqrt{1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{16-6-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Finalement: $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$

Simplification: $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})^2}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}}$

↓ puisque $1+\sqrt{5} > 0$.

$$= \sqrt{\frac{(10-2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}{6^2 - (2\sqrt{5})^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{60 - 12\sqrt{5} - 20\sqrt{5} + 20}{36 - 20}} = \sqrt{\frac{80 - 32\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

↓ simplification par 16.

On retrouve bien l'expression obtenue à la partie I.