DS6 - Corrigé

Exo 1 - Équations différentielles

1) Soit (E) : $ty' - 2y = \frac{t^3}{(t+1)^2} \iff y' - \frac{2}{t}y = \frac{t^2}{(t+1)^2}$ sur $]0,+\infty[$.

- On pose (E_H) l'équation homogène associée : $(E_H) : y' - \frac{2}{t}y = 0$.

Une primitive de $t \mapsto -\frac{2}{t}$ sur $]0,+\infty[$ est $A(t) = -2\ln(t)$. Ainsi, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{y_h(t) = \lambda e^{+2\ln(t)} = \lambda t^2 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

- Soit $\lambda :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et $y_p :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_p(t) = \lambda(t)t^2$. Alors y_p est dérivable, et $\forall t \in]0,+\infty[$:

$y_p'(t) = \lambda'(t)t^2 + 2t\lambda(t)$. Ainsi :

$$\forall t > 0, \quad y_p'(t) - \frac{2}{t}y_p(t) = \lambda'(t)t^2 + 2t\lambda(t) - \frac{2}{t}t^2\lambda(t) = \lambda'(t)t^2.$$

D'où : y_p vérifie $(E) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \ \lambda'(t)t^2 = \frac{t^2}{(t+1)^2}$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \ \boxed{\lambda'(t) = \frac{1}{(t+1)^2}}$$

$\boxed{\lambda(t) = -\frac{1}{t+1}}$ convient, donc une solution particulière de (E) est donnée par

$$\boxed{y_p(t) = -\frac{t^2}{t+1}}$$

- Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad \boxed{y(t) = \lambda t^2 - \frac{t^2}{t+1} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

- On trouve λ à l'aide de la condition initiale. On a :

$$y(1) = 2 \iff \lambda \times 1^2 - \frac{1^2}{1+1} = 2 \iff \lambda - \frac{1}{2} = 2 \iff \lambda = \frac{5}{2}.$$

Donc l'unique solution du problème de Cauchy donné est :

$$\boxed{\forall t \in]0,+\infty[, \ y(t) = \frac{5}{2}t^2 - \frac{t^2}{t+1}}$$

2) • Soit (E_H) l'équation homogène associée à (E) : $2y''-2y'+\frac{y}{2}=0$

Posons (E_c) l'équation caractéristique : $2x^2-2x+\frac{1}{2}=0$. Son discriminant est :

$\Delta = 4-4=0$, donc l'unique solution réelle (double) est $x_0=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Alors les solutions de (E_H) sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{y_h(x)=(\lambda+\mu x)e^{\frac{x}{2}} \text{ avec } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.}$$

• Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x)=ae^{-x}$, avec $a\in\mathbb{R}$.

y_p est bien deux fois dérivable et $\forall x\in\mathbb{R}$:

$y_p'(x)=-ae^{-x}$ et $y_p''(x)=-(-a)e^{-x}=ae^{-x}$. Ainsi :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $2y_p''(x)-2y_p'(x)+\frac{y_p(x)}{2}=2ae^{-x}+2ae^{-x}+\frac{a}{2}e^{-x}=\frac{9}{2}ae^{-x}$

Donc y_p vérifie (E) $\iff \forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{9}{2}ae^{-x}=9e^{-x} \iff \frac{a}{2}=1 \iff a=2$.

Ainsi, une solution particulière de (E) est donnée par $\boxed{y_p(x)=2e^{-x}}$

• Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions :

$$\boxed{y(x)=(\lambda+\mu x)e^{x/2}+2e^{-x}, \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}}$$

Exercice 2 - Equivalents

1) Soient (u_n), (v_n) deux suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

On dit qu'elles sont équivalentes lorsque $\boxed{\frac{u_n}{v_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1}$.

2) Montrons que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$. On a, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, si $n\geq 2$: $\ln(n)>0$ donc

$\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\leq\frac{u_n}{\ln n}\leq\frac{\ln(n)+1}{\ln n}$. Or $\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\frac{\ln n+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}=1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

Et $\frac{\ln(n)+1}{\ln n}=1+\frac{1}{\ln n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$. D'où, par encadrement :

$\boxed{\frac{u_n}{\ln n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1}$. Et ainsi : $\boxed{u_n\underset{+\infty}{\sim}\ln n}$

3) a) $U_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{3n^2-1} = e^{(3n^2-1)\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$

Or $3n^2-1 \underset{+\infty}{\sim} 3n^2$ et $\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$ puisque $-\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $(3n^2-1)\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} 3n^2\times\left(-\frac{1}{n^2}\right) = -3$. Par composition de limites, on a :

$\boxed{U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-3}}$, et donc $\boxed{U_n \underset{+\infty}{\sim} e^{-3}}$

b) On a $\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. donc $\sqrt{1+\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)$

$\underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{4n^2}$

(car $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$).

De plus, $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$ et $1-e^{1/n} = -\left(e^{1/n}-1\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$ puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

D'où $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1/4n^2}{n\times(-1/n)} = \frac{1}{4n^2}$, et donc $\boxed{v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

Exercice 3 - Suites adjacentes.

1)
```
def suitesuvw(n):
    L = [0,1,2]
    for i in range(1,n+1):
        u_n = (L[0] + 2*L[1] + L[2])/4
        v_n = (L[0] + L[1] + 2*L[2])/4
        w_n = (L[0] + 2*L[1] + 3*L[2])/6
        L = [u_n, v_n, w_n]
    return L
```

5)
```
n = 0
while suitesuvw(n)[2] - suitesuvw(n)[0]
        > 10**(-4):
    n += 1
print(suitesuvw(n)[1])
```

---

2) Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "$u_n < v_n < w_n$".

(I) : $0<1<2$ donc on a bien $u_0 < v_0 < w_0$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie

(H) : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

On a $v_{n+1}-u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n+2w_n-(u_n+2v_n+w_n)}{4} = \dfrac{w_n-v_n}{4}$

$w_n > v_n$ selon l'hypothèse de récurrence, donc $v_{n+1}-u_{n+1} > 0$.

De plus, $w_{n+1}-v_{n+1} = \dfrac{2(u_n+2v_n+\cancel{3}w_n)-3(u_n+v_n+\cancel{2}w_n)}{12} = \dfrac{v_n-u_n}{12} > 0$ par HR.

D'où $w_{n+1} > v_{n+1} > u_{n+1}$: P(n+1) est vraie. D'où l'hérédité.

On a bien montré par principe de récurrence que : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n<v_n<w_n}$.

3) • $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = \dfrac{u_n+2v_n+w_n-4u_n}{4} = \dfrac{2v_n+w_n-3u_n}{4} = \dfrac{2(v_n-u_n)+w_n-u_n}{4}$

>0 puisque $v_n>u_n$ et $w_n>u_n$.

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante.

• $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1}-w_n = \dfrac{u_n+2v_n+3w_n-6w_n}{6} = \dfrac{u_n+2v_n-3w_n}{6} = \dfrac{(u_n-w_n)+2(v_n-w_n)}{6}$

<0 car $u_n<w_n$ et $v_n<w_n$.

Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien décroissante.

• $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1}-u_{n+1} = \dfrac{2u_n+4v_n+6w_n-3u_n-6v_n-3w_n}{12} = \dfrac{3w_n-u_n-2v_n}{12}$

$< \dfrac{3w_n-3u_n}{12}$ puisque $-v_n<-u_n$

$< \dfrac{w_n-u_n}{4}$.

Ainsi, on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0<w_n-u_n<\dfrac{w_0-u_0}{4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

D'où : $w_n-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par encadrement

• En conclusion : $\boxed{(u_n) \text{ et } (w_n) \text{ sont bien adjacentes}}$

4) Comme (u_n) et (w_n) sont adjacentes, elles convergent vers ~~une~~ même limite finie $l\in\mathbb{R}$.

Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\le v_n\le w_n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$. D'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l\in\mathbb{R}}$

4

6) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a u_{n+1} + b v_{n+1} + c w_{n+1} = \frac{a(3u_n + 6v_n + 3w_n) + b(3u_n + 3v_n + 6w_n) + c(2u_n + 4v_n + 6w_n)}{12}$$

$$= \frac{(3a+3b+2c)u_n + (6a+3b+4c)v_n + (3a+6b+6c)w_n}{12}$$

Par identification, on cherche donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$(S)\begin{cases} a = \dfrac{3a+3b+2c}{12} \\ b = \dfrac{6a+3b+4c}{12} \\ c = \dfrac{3a+6b+6c}{12} \end{cases}$$

On résout le système linéaire (S).

$$\text{On a } (S) \iff \begin{cases} 9a - 3b - 2c = 0 \\ -6a + 9b - 4c = 0 \\ -3a - 6b + 6c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 2b - 2c = 0 & \left(\frac{L_3}{-3}\right) \\ 6a - 9b + 4c = 0 \\ 9a - 3b - 2c = 0 & (L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b - 2c = 0 \\ -21b + 16c = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1 \\ -21b + 16c = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1 \end{cases} \quad \boxed{\iff \begin{cases} a + 2b = 2c \\ b = \dfrac{16c}{21} \end{cases}}$$

Par exemple, $\boxed{c = 21,\ b = 16 \text{ et } a = 42 - 32 = 10 \text{ conviennent}}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $10u_{n+1} + 16v_{n+1} + 21w_{n+1} = 10u_n + 16v_n + 21w_n$, donc la suite

$\boxed{(10u_n + 16v_n + 21w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est constante}}$, égale à

$10u_0 + 16v_0 + 21w_0 = 16 + 42 = 58$.

7) Or $10u_n + 16v_n + 21w_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 10\ell + 16\ell + 21\ell = 47\ell$.

On en déduit que $\boxed{58 = 47\ell}$ et donc que $\ell = \dfrac{58}{47}$.

Exercice 4 - Géométrie

Partie I - Equations de plans

1. Avec $t=0$ et $t=1$: $F(-3,1,2)$ et $F'(-2,3,1)$ sont sur la droite $\mathcal{D}$.

On peut prendre comme vecteur directeur $\vec{u} = \overrightarrow{FF'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. a) $\mathcal{P}_1$ est dirigé par $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui ne sont pas colinéaires.

Ainsi : $M(x,y,z) \in \mathcal{P}_1 \iff \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires

$$\iff \exists s,t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{BM} = s\overrightarrow{BC} + t\overrightarrow{BD}$$

$$\iff \exists s,t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s-t \\ 7s+4t \\ -3s+t \end{pmatrix}$$

D'où une représentation paramétrique du plan

$$\boxed{\mathcal{P}_1 \begin{cases} x = -1+3s-t \\ y = 7s+4t \\ z = -3s+t \end{cases},\ s,t \in \mathbb{R}}$$

On a $\begin{cases} -3s+t = z \\ 7s+4t = y \end{cases} \iff \begin{cases} -3s+t = z \\ 19s = y-4z \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$

$$\iff \begin{cases} s = \dfrac{y-4z}{19} \\ t = z+3s = \dfrac{19z+3y-12z}{19} = \dfrac{7z+3y}{19} \end{cases}$$

Donc $x = -1+3s-t = -1 + \dfrac{3y-12z}{19} - \dfrac{7z+3y}{19} = \dfrac{-19-19z}{19} = -1-z$

D'où $\boxed{\mathcal{P}_1 : \quad x + z + 1 = 0}$

b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors on a $(-3+t)+(2-t)+1 = -3+2+1 = 0$, donc

$\forall t \in \mathbb{R},\ (-3+t, 1+2t, 2-t) \in \mathcal{P}_1$.

On en déduit que la droite $\mathcal{D}$ est contenue dans le plan $\mathcal{P}_1$:

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{P}_1$$

3. On a aussi : $\forall t \in \mathbb{R}$, $-2(-3+t)+(1+2t)-7 = 6-2t+1+2t-7=0$
donc $(-3+t, 1+2t, 2-t) \in \mathcal{P}_2$.
D'où : $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}_2$

4. Comme $\mathcal{P}_1$ rencontre $\mathcal{P}_2$, ces deux plans sont parallèles si et seulement si ils sont égaux. Or avec par exemple B : $B \notin \mathcal{P}_2$ puisque $-2(-1)+0-7 = -5 \neq 0$.

D'où $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$, et donc $\boxed{\mathcal{P}_1 \text{ et } \mathcal{P}_2 \text{ ne sont pas parallèles}}$

On a donc une représentation de
$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} x+z-1=0 \\ -2x+y-7=0 \end{cases}}$$

5. $\mathcal{P}_3$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}$, donc $\boxed{\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$ en est un vecteur normal.

Ainsi, pour $M(x,y,z)$ un point de l'espace, on a :
$M \in \mathcal{P}_3 \iff \vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux $\iff \langle \vec{AM}, \vec{u} \rangle = 0$
$$\iff \left\langle \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \iff x-a+2(y-b)-(z-c)=0$$
$$\boxed{\iff x+2y-z-a-2b+c=0}$$
C'est l'équation cartésienne cherchée.

Partie II - Projeté orthogonal

6) Le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$ est l'unique point H de $\mathcal{D}$ tel que (AH) et $\mathcal{D}$ soient perpendiculaires.
Il s'agit donc de l'unique point de $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ tel que $H \in \mathcal{P}_3$.
C'est donc bien l'unique point d'intersection de $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$.

7. $H \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$, donc $H(\alpha, \beta, \gamma)$ vérifie :

$$\begin{cases} \alpha + \quad \gamma + 1 = 0 \\ -2\alpha + \beta \quad - 7 = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma - a - 2b + c = 0 \end{cases}, \text{ soit : } \begin{cases} 1\alpha + 0\beta + 1\gamma = -1 \\ -2\alpha + 1\beta + 0\gamma = 7 \\ 1\alpha + 2\beta - 1\gamma = a + 2b - c \end{cases}, \text{ et donc}$$

$$\boxed{M_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ a+2b-c \end{pmatrix}}.$$

8. Utilisons le pivot de Gauss :

$$(M_1 | I_3) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -2 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

On a bien $rg(M_1) = 3$, donc M_1 est inversible. Poursuivons.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/6 & 1/3 & -1/6 \end{array}\right) L_3 \leftarrow \frac{-1}{6} L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 5/6 & 1/3 & -1/6 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array}$$

On a donc $\boxed{M_1^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$

9. On a $M_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = M_2$ donc, comme M_1 est inversible :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = M_1^{-1} M_2} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ a+2b-c \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} a+2b-c-15 \\ 2a+4b-2c+12 \\ -a-2b+c+9 \end{pmatrix}$$

D'où $\boxed{H=\left(\frac{a+2b-c-15}{6}, \frac{a+2b-c+6}{3}, \frac{-a-2b+c+9}{6}\right)}$

10) Soit $M(-3+t, 1+2t, 2-t)$ avec $t\in\mathbb{R}$. On a :

$$\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}-3+t-a\\1+2t-b\\2-t-c\end{pmatrix} \text{ donc } \langle \overrightarrow{AM}, \vec{u}\rangle = 0 \iff (-3+t-a)+2(1+2t-b)-(2-t-c)=0$$

$$\iff -3+t-a+\cancel{2}+4t-2b-\cancel{2}+t+c=-3+6t-a-2b+c=0$$

$$\boxed{\iff t=\frac{a+2b-c+3}{6}}.$$

11) D'où $H=(\alpha,\beta,\gamma)$ avec
$$\begin{cases}\alpha=-3+t=\dfrac{a+2b-c+3-18}{6}=\dfrac{a+2b-c-15}{6}\\[2mm] \beta=1+2t=\dfrac{2a+4b-2c+6+6}{6}=\dfrac{a+2b-c+6}{3}\\[2mm] \gamma=2-t=\dfrac{-a-2b+c-3+12}{6}=\dfrac{-a-2b+c+9}{6}.\end{cases}$$

On retrouve bien les mêmes coordonnées.

Exercice 5 - Python

1) len(M) et len(M[0]) donnent respectivement le nombre de lignes et le nombre de colonnes de M.

2)
```python
def est_symetrique(M):
    if len(M) != len(M[0]):
        print("la matrice doit être carrée !")
    else:
        for i in range(len(M)):
            for j in range(i):
                if M[i][j] != M[j][i]:
                    return False
        return True
```

3)
```python
def matrice_nulle(n,p):
    return [[0 for j in range(p)] for i in range(n)]
```

4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est antisymétrique si : $\boxed{\forall i,j\in[\![1,n]\!],\ M_{ij}=-M_{ji}}$. En particulier : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $M_{ii}=-M_{ii}$ donc $M_{ii}=0$. 9

5)
```python
from random import randint
def antisym_alea(n,a):
    M = matrice_nulle(n,n)
    for i in range(n):
        for j in range(i):
            coef = randint(-a,a)
            M[i][j] = coef
            M[j][i] = -coef
    return M
```