DS 7 – Maths & Info

Partie Maths – Corrigé

Exercice 1.

On considère f définie sur $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $\quad f(x) = x + \dfrac{\ln(\cos(x))}{\tan(x)}$.

1. Prolongement(s).

   a) On a $\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 + (\cos(x) - 1)\right)$.

   Comme $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $\ln(\cos(x)) \underset{0}{\sim} \cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.

   D'où : $\boxed{\ln(\cos(x)) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}.}$

   b) On a $\dfrac{\ln(\cos(x))}{\tan(x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x} = -\dfrac{x}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

   D'où, par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0.}$

   c) Soit $h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a $f\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \dfrac{\pi}{2} - h + \dfrac{\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}$.

   Or $\cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \sin(h)$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \cos(h)$, donc $\tan\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \dfrac{\cos(h)}{\sin(h)}$.

   Ainsi, on obtient : $f\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \dfrac{\pi}{2} - h + \dfrac{\ln(\sin(h))}{\frac{\cos(h)}{\sin(h)}} \boxed{= \dfrac{\pi}{2} - h + \dfrac{\sin(h)\ln(\sin(h))}{\cos(h)}.}$

   d) On sait que $\boxed{x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}$ par **croissance comparée**.

   e) Comme $\sin(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, d'après la question précédente :
   $\sin(h)\ln(\sin(h)) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   De plus, $\cos(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$. Par opérations, on obtient :
   $\lim\limits_{h\to 0} f\left(\dfrac{\pi}{2} - h\right) = \dfrac{\pi}{2} - 0 + \dfrac{0}{1} = \dfrac{\pi}{2}$. $\quad$ D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \dfrac{\pi}{2} \in \mathbb{R}}.$

   Ainsi, f admet des limites finies en 0^+ et en $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$. Elle est donc bien **prolongeable par continuité** sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, par la fonction $\tilde{f}$ donnée par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2. f est continue et dérivable sur l'intervalle $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par opérations et composition de fonctions dérivables sur leur domaine de définition. De plus, on a, pour tout $x \in I$:
   $f'(x) = 1 + \dfrac{-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\tan(x) - \frac{\ln(\cos(x))}{\cos^2(x)}}{\tan^2(x)} = \dfrac{\tan^2(x) - \tan^2(x) - \frac{\ln(\cos(x))}{\cos^2(x)}}{\tan^2(x)} = \dfrac{-\ln(\cos(x))}{\tan^2(x)\cos^2(x)}$

   On a donc $f'(x) = -\dfrac{\ln(\cos(x))}{\sin^2(x)}$.

3. Réciproque.

a) $\forall x \in I, \cos(x) \in]0,1[$ donc $\ln(\cos(x)) < 0$.
On en déduit que $\forall x \in I, \quad f'(x) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur I. D'après le **théorème de la bijection continue**, elle $\boxed{\text{réalise une bijection}}$ de I sur $J = f(I)$.
Or d'après les limites en 0 et $\frac{\pi}{2}$, on a $\boxed{J = f(I) = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[= I}$.

b) D'après le théorème de la bijection continue, la réciproque $f^{-1} : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ de f est $\boxed{\text{continue}}$ et strictement monotone de même monotonie que f, c'est-à-dire $\boxed{\text{strictement croissante}}$. On en déduit le tableau de variations :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f^{-1}(x)$	$0 \nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

c) D'après son tableau de variations, f^{-1} admet des limites finies aux extrémités de son intervalle de définition. Comme de plus elle est continue, $\boxed{\text{on peut bien la prolonger}}$ en une fonction continue $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & \text{si} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

4. Dérivabilité.

a) Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I, et $x_0 \in I$.
On dit que g est dérivable en x_0 lorsque les taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admettent une limite finie quand x tend vers x_0.
Cette limite est alors appelée le nombre dérivé de f en x_0, et se note $f'(x_0)$ ou $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

b) Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a :
$\dfrac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(x)}{x - x_0} = \dfrac{f(x) - 0}{x} = 1 + \dfrac{\ln(\cos(x))}{x\tan(x)}$.
Or on a vu que $\dfrac{\ln(\cos(x))}{\tan(x)} \underset{0}{\sim} -\dfrac{x}{2}$, donc $\dfrac{\ln(\cos(x))}{x\tan(x)} \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{2}$.
Ainsi, par opérations, on a $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$.
La fonction $\boxed{\widetilde{f} \text{ est alors bien dérivable en } 0, \text{ et } \widetilde{f}'(0) = -\frac{1}{2}.}$

c) **Bonus :** On étudie $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - h\right) - \frac{\pi}{2}}{-h}$.
Or : $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2} - h\right) - \frac{\pi}{2}}{-h} = \dfrac{1}{-h}\left(\dfrac{\pi}{2} - h + \dfrac{\sin(h)\ln(\sin(h))}{\cos(h)} - \dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - \dfrac{\sin(h)\ln(\sin(h))}{h\cos(h)}$.
On sait que $\dfrac{\sin(h)\ln(\sin(h))}{h\cos(h)} \underset{0}{\sim} \dfrac{h\ln(\sin(h))}{h \times 1} = \ln(\sin(h)) \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.
Ainsi, par opérations : $\boxed{1 - \dfrac{\sin(h)\ln(\sin(h))}{h\cos(h)} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty. \quad \widetilde{f} \text{ n'est donc pas dérivable en } \dfrac{\pi}{2}.}$

Exercice 2.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifie $P(X+1) - P(X-1) = X^2 + 1$.

1. Si $\deg(P) \leq 1$, on a $\deg(P(X+1)) \leq 1$ et $\deg(P(X-1)) \leq 1$, donc $\deg\left(P(X+1) - P(X-1)\right) \leq 1$. C'est impossible, puisque $\deg(X^2+1) = 2$.

2. On note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n = \deg(P) \geq 2$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

   a) On a alors $P(X+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k$ et $P(X-1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X-1)^k$. D'où :
   $P(X+1)-P(X-1) = a_n\left((X+1)^n - (X-1)^n\right) + a_{n-1}\left((X+1)^{n-1} - (X-1)^{n-1}\right) + Q$,
   avec $\boxed{Q = \sum_{k=0}^{n-2} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n-2} a_k (X-1)^k.}$
   Comme $\deg(a_k(X+1)^k) = \deg(a_k(X-1)^k) \leq k \leq n-2$ pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, on obtient que $\deg(Q) \leq n-2$.
   Donc on a bien $\boxed{Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X].}$

   b) Soit $q \in \mathbb{N}, q \geq 2$. On a $(X+1)^q = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} X^k$, et $(X-1)^q = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-1)^{q-k} X^k$.
   Ainsi : $(X+1)^q - (X-1)^q = \sum_{k=0}^{q} \left(1 - (-1)^{q-k}\right) \binom{q}{k} X^k$.

   - Le coefficient en X^q de ce polynôme est $\binom{q}{q}\left(1 - (-1)^{q-q}\right) = 1 \times (1-1) = 0$.
   - Son coefficient en X^{q-1} est $\binom{q}{q-1}\left(1 - (-1)^{q-q+1}\right) = q \times (1+1) = 2q \neq 0$.

   On obtient que $\boxed{\deg\left((X+1)^q - (X-1)^q\right) = q-1, \text{ et son coefficient dominant est } 2q.}$

   c) D'après les questions précédentes :

   - $\deg\left(a_n\left((X+1)^n - (X-1)^n\right)\right) = n-1$
   - $\deg\left(a_{n-1}\left((X+1)^{n-1} - (X-1)^{n-1}\right)\right) \leq n-2$
   - $\deg(Q) \leq n-2$

   Ainsi, comme $n-1 > n-2$, $\boxed{\deg\left(P(X+1) - P(X-1)\right) = n-1}$, et son coefficient dominant est celui de $a_n\left((X+1)^n - (X-1)^n\right)$, à savoir $\boxed{2na_n.}$

   d) Si P vérifie l'égalité de l'énoncé, **en passant au degré**, on obtient $\boxed{n-1 = 2, \text{ donc } n = 3.}$

3. D'après les questions précédentes, on prend P un polynôme de degré 3.
   Posons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.
   On a alors $P(X+1) = a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d$
   $= a(X^3 + 3X^2 + 3X + 1) + b(X^2 + 2X + 1) + cX + c + d$.
   De même, $P(X-1) = a(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) + b(X^2 - 2X + 1) + cX - c + d$.
   Ainsi, $\boxed{P(X+1) - P(X-1) = 6aX^2 + 2a + 4bX + 2c.}$
   Finalement, par **identification** : P vérifie l'égalité si et seulement si $6a = 1$, $4b = 0$ et $2a + 2c = 1$, c'est-à-dire $\boxed{a = \frac{1}{6}, \ b = 0 \text{ et } c = \frac{1}{3}.}$
   Ainsi, l'ensemble des polynômes qui vérifient la relation de l'énoncé est l'ensemble :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{3}X + d \mid d \in \mathbb{R} \right\}}$$

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$.

1. $P = X^{n-1}\left(nX^3 - (4n+1)X^2 + 4(n+1)X - 4\right)$ où 0 n'est pas racine du second facteur. Ainsi, 0 est racine de P de multiplicité $n-1$.
2. On a $P(2) = n2^{n+2} - (4n+1)2^{n+1} + 4(n+1)2^n - 4 \times 2^{n-1} = (4n - 8n - 2 + 4n + 4 - 2)2^n = 0$. Ainsi, 2 est bien racine de P. Pour que 2 soit racine multiple, on doit montrer que $P'(2) = 0$.

   On a $P' = n(n+2)X^{n+1} - (4n+1)(n+1)X^n + 4n(n+1)X^{n-1} - 4(n-1)X^{n-2}$
   D'où $P'(2) = 2n(n+2)2^n - (4n^2 + 5n + 1)2^n + 2n(n+1)2^n - (n-1)2^n$
   $= (2n^2 + 4n - 4n^2 - 5n - 1 + 2n^2 + 2n - n + 1)2^n = 0$

   On a bien $\boxed{P(2) = P'(2) = 0, \text{ donc 2 est racine multiple de } P.}$
   Note : Pour montrer que la 2 est exactement racine double, il suffit de calculer P'' et de vérifier que $P''(2) \neq 0$.
3. On déduit des deux questions précédentes que P peut se factoriser par $P = X^{n-1}(X-2)^2 Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(Q) = n + 2 - (n-1) - 2 = 1$.
   On écrit donc $Q = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On sait qu'alors :
   $P = X^{n-1}\left(nX^3 - (4n+1)X^2 + 4(n+1)X - 4\right) = X^{n-1}(X-2)^2(aX+b)$.
   Or $(X-2)^2(aX+b) = (X^2 - 4X + 4)(aX+b) = aX^3 - 4aX^2 + 4aX + bX^2 - 4bX + 4b = aX^3 + (b-4a)X^2 + (4a-4b)X + 4b$.
   Par **identification** avec le polynôme $nX^3 - (4n+1)X^2 + 4(n+1)X - 4$, on en déduit que $a = n$ et $4b = -4$, donc $b = -1$.
   Ainsi : $\boxed{P = X^{n-1}(X-2)^2(nX-1) = nX^{n-1}(X-2)^2\left(X - \frac{1}{n}\right).}$
4. Avec la factorisation ci-dessus : $\boxed{P \text{ est bien scindé, et ses racines sont } 0, 2 \text{ et } \frac{1}{n}.}$
   Note : la somme des multiplicités est bien égale au degré du polynôme !

Exercice 4.

Pour tout réel $t > 0$, on définit le polynôme $P_t = X^5 + tX - 1 \in \mathbb{R}_5[X]$.
Le but de l'exercice est d'étudier les racines du polynôme P_t en fonction de $t > 0$.

1. On fixe $t > 0$.
   a) On note encore P_t la fonction polynomiale $x \mapsto P_t(x)$. Elle est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Sa dérivée est donnée par $\forall x \in \mathbb{R}, P_t'(x) = 5x^4 + t > 0$ puisque $t > 0$.
   Ainsi, la fonction P_t est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} P_t(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^5 = \pm\infty$, on a $P_t(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
   Ainsi, d'après le **théorème de la bijection continue**, P_t réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{0 admet donc bien un unique antécédent par } P_t.}$
   Note : On peut aussi utiliser le TVI pour l'existence de la racine, puis la stricte croissance pour l'unicité.
   b) On a $\boxed{P_t(0) = -1 < 0 \text{ et } P_t(1) = t > 0.}$ Ainsi, d'après le TVI, P_t s'annule sur $]0, 1[$.
   L'unique racine de P_t est donc bien dans l'intervalle $]0, 1[$, soit : $\boxed{f(t) \in]0, 1[.}$

On a donc une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0 \quad (E_t)$$

2. Soient $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $0 < s < t$.
   a) On sait que $f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0$, donc $f(t)^5 - 1 = -tf(t)$.
   Ainsi, $P_s(f(t)) = f(t)^5 + sf(t) - 1 = sf(t) - tf(t) \boxed{= (s-t)f(t).}$
   b) Comme $s < t$ et $f(t) > 0$, on a $P_s(f(t)) = (s-t)f(t) < 0$.
   Comme de plus $P_s(f(s)) = 0$ par définition de $f(s)$, on obtient bien : $\boxed{P_s(f(t)) < P_s(f(s)).}$
   c) Comme P_s est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $P_s(f(t)) < P_s(f(s))$, on a $\boxed{f(t) < f(s).}$
   C'est vrai pour tout choix de $0 < s < t$, donc la fonction f est bien **strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.**
3. f est monotone sur $]0, +\infty[$, donc d'après le **théorème de la limite monotone** pour les fonctions, f admet une limite (à droite) en 0 et une limite (à gauche) en $+\infty$.
   Comme f est bornée ($\forall t > 0, f(t) \in]0, 1[$), on sait que ces limites sont finies.
   Donc f admet bien des $\boxed{\text{limites finies en } 0^+ \text{ et en } +\infty.}$
4. a) On note $l = \lim\limits_{t \to 0^+} f(t) \in \mathbb{R}$.
   On sait que pour tout $t > 0$, $f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0$. Or par opérations, $f(t)^5 + tf(t) - 1 \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} l^5 + 0l - 1 = l^5 - 1$.
   D'où : $l^5 - 1 = 0$.
   b) On a $l^5 - 1 = 0 \iff l^5 = 1 \iff l = 1$, donc $l = 1$.
   Autrement dit : $\boxed{\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = 1}$
   c) On note $l' = \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) \in \mathbb{R}$. Supposons par l'absurde que $l' \in \mathbb{R}^*$.
   Alors par opérations, on sait que $tf(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, et donc $f(t)^5 + tf(t) - 1 \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.
   Comme $\forall t > 0, f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0$, on obtient $0 = \pm\infty$: c'est évidemment absurde.
   Ainsi, $j' = 0$, c'est-à-dire : $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.}$
   d) On utilise encore l'égalité (E_t). On sait que $\forall t > 0$, $tf(t) = 1 - f(t)^5 \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1 - 0^5 = 1$.
   On a $tf(t) \underset{+\infty}{\sim} 1$, et donc $\boxed{f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}.}$

La fin de l'exercice est à faire à la maison

5. À l'aide des questions précédentes, dresser le tableau de variation de f, et montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle que l'on précisera.
6. a) Justifier que la bijection réciproque de f est la fonction $g : \left\{ \begin{array}{rcl}]0,1[& \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1-x^5}{x} \end{array} \right.$
   b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et exprimer f' en fonction de f.
7. Montrer par récurrence que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.