DS 1 – Maths & Info

Corrigé

Exercice 1. Logique

1. Soit E une partie de $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, et $a \in \mathbb{R}$.

   a) $a \in E$ et $(\forall x \in E, x \leq a)$ b) $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E, x \geq m$

   c) $(\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)) \Longrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y))$.

   d) $(\exists x \in E, a < x)$ ou $(\exists M \in \mathbb{R}, (\forall x \in E, x \leq M)$ et $M < a)$.

   a) Sa négation est : $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0)$ et $f(1) \notin \mathbb{Z}$ et $f(0) \neq 1$.
   Sa contraposée est : $(f(1) \notin \mathbb{Z}$ et $f(0) \neq 1) \Longrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0)$.

   b)

   a) Pour $f_1 : x \mapsto e^x$, l'assertion est $\boxed{\text{vraie}}$. En effet, f_1 est à valeurs strictement positives, et $f_1(0) = 1$ donc le second membre est vrai aussi.

   b) Pour $f_2 : x \mapsto x + 3$, l'assertion est $\boxed{\text{vraie}}$. En effet, $f_2(-4) = -1 < 0$, donc le membre de gauche est faut, et donc l'implication est bien vérifiée.

   c) Pour $f_3 : x \mapsto x^2 + \sqrt{2}$, l'assertion est $\boxed{\text{fausse}}$. En effet, f_3 est à valeurs strictement positives, mais $f(0) = \sqrt{2} \neq 1$ et $f(1) = 1 + \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, donc le second membre est faux.

2. Chacun des produits cartésiens se représente par un rectangle : $[-1, 1] \times [0, 5]$, $[-2, 2] \times [0, 4]$, $[-3, 3] \times [0, 3]$, $[-4, 4] \times [0, 2]$ et $[-5, 5] \times [0, 1]$.
   Après représentation, l'union de ces 5 rectangles donne une sorte de pyramide !

Exercice 2. Récurrences

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose P_n la propriété : $u_n \geq 3$.

   - Initialisation ($n = 0$). On a $u_0 = 4 \geq 3$, donc la propriété P_0 est bien vraie.
   - Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que P_n est vrai, c'est-à-dire $u_n \geq 3$, et on montre qu'alors P_{n+1} est vraie aussi.
     On a $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 9}{5}$. Comme $u_n \geq 3$, on a $2u_n + 9 \geq 2 \times 3 + 9 = 15$, et donc $\dfrac{2u_n + 9}{5} \geq 3$.
     On a bien $u_{n+1} \geq 3$, et donc P_{n+1} est vraie. D'où l'hérédité.
   - Conclusion. Par principe de récurrence, on a montré que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3}$.

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose Q_n la propriété : $u_n - 3 = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

   - Initialisation ($n = 0$). On a $u_0 - 3 = 4 - 3 = 1$, et d'autre part $\left(\dfrac{2}{5}\right)^0 = 1$, donc la propriété Q_0 est bien vraie.

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que Q_n est vrai, c'est-à-dire $u_n - 3 = \left(\frac{2}{5}\right)^n$, et on montre qu'alors Q_{n+1} est vrai aussi.
  On a $u_{n+1} - 3 = \dfrac{2u_n + 9}{5} - 3 = \dfrac{2u_n + 9 - 15}{5} = \dfrac{2u_n - 6}{5} = \dfrac{2}{5}(u_n - 3)$.
  Ainsi, par hypothèse de récurrence : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}$.
  P_{n+1} est donc bien vraie. D'où l'hérédité.
- Conclusion. Par principe de récurrence, on a montré que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 3 = \left(\frac{2}{5}\right)^n}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose H_n la propriété : $w_n = n(n-1) - 1$.
   On la montre par récurrence double
   - Initialisation ($n = 0$ et $n = 1$). On a $w_0 = w_1 = -1$. D'autre part : $0(0-1) - 1 = -1-$ et $1(1-1) - 1 = -1$. On a bien égalité, donc les propriétés H_0 et H_1 sont bien vraies.
   - Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n et H_{n+1} sont vraies, et on montre qu'alors H_{n+2} est vraie aussi.
     On a $w_{n+2} = (n+1)w_{n+1} - (n+2)w_n$.
     Or, par hypothèse de récurrence, $w_n = n(n-1) - 1$ et $w_{n+1} = (n+1)n - 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= (n+1)(n(n+1) - 1) - (n+2)(n(n-1) - 1) \\ &= (n+1)(n^2 + n - 1) - (n+2)(n^2 - n - 1) \\ &= n^3 + 2n^2 - 1 - (n^3 + n^2 - 3n - 2) \\ &= n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

     D'autre part : $(n+2)(n+2-1) - 1 = (n+2)(n+1) - 1 = n^2 + 3n + 1$.
     On a bien égalité, c'est-à-dire $w_{n+2} = (n+2)(n+2-1) - 1$: H_{n+2} est vraie. D'où l'hérédité.
   - Conclusion. Par principe de récurrence, on a montré que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, w_n = n(n-1) - 1}$.

Exercice 3. (In)équations

1. a) Le domaine d'existence de cette inéquation est $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$. Pour tout $x \in \mathcal{D}$:
   $\dfrac{x}{2x-3} \leq x - 2 \iff \dfrac{x - (x-2)(2x-3)}{2x-3} \leq 0 \iff \dfrac{-2x^2 + 8x - 6}{2x-3} \leq 0 \iff \dfrac{-2(x-1)(x-3)}{2x-3}$.
   On dresse le tableau de signe de cette expression, en on obtient comme ensemble de solutions : $\boxed{\S = \left[1, \frac{3}{2}\right[\cup [3, +\infty[}$.

   b) Le domaine d'existence de cette équation est $\mathbb{R}$. On procède par disjonction de cas.
   - Cas 1 : $1 - 2x \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq \dfrac{1}{2}$. Pour tout $x \in \mathcal{D}_1 = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$, l'équation se simplifie en :
     $1 - 2x = 3x - 2 \iff 3 = 5x \iff x = \dfrac{5}{3}$. Comme $\dfrac{5}{3} \notin \mathcal{D}$, le premier ensemble de solutions obtenu est $\mathcal{S}_1 = \varnothing$.
   - Cas 2 : $1 - 2x < 0$, c'est-à-dire $x \in \mathcal{D}_2 = \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. Pour tout $x \in \mathcal{D}_2$, l'équation se simplifie en :
     $2x - 1 = 3x - 2 \iff x = 1$. Comme $1 \in \mathcal{D}_2$, on obtient comme second ensemble de solutions : $\mathcal{S}_2 = \{1\}$.

- En conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation est $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \{1\}}$.

2. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit sa partie entière comme étant le plus grand entier $k \in \mathbb{Z}$ qui vérifie $k \leq x$. On a alors : $\lfloor x \rfloor = k \iff k \leq x < k+1 \iff x - 1 < k \leq x$.

   b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut donc écrire : $\lfloor x^2 - 1 \rfloor = 2 \iff 2 \leq x^2 - 1 < 3 \iff 3 \leq x^2 < 4$.
   L'ensemble des solutions de cette équation est donc : $\boxed{\mathcal{S} =]-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2[}$

Exercice 4. Python

1. L'instruction Python qui permet d'importer la fonction `sqrt` du module `math` est : `from math import sqrt`
2. On peut écrire la fonction suivante :

```
from math import sqrt
def ma_fonction(x):
    if x < 0:
        return x**5
    elif x == 0:
        return -2
    elif x < 3:
        return 5*x - 3
    else:
        return sqrt(x)
```

3. Il s'agit simplement de savoir si $a \leq b$ ou si $a > b$. On peut par exemple écrire :

```
def minimum(a, b):
    if a <= b:
        return a
    else:
        return b
```

Exercice 5. Problème

1. a) Comme $0^3 = 0$, $2^3 = 8$ et $(-1)^3 = -1$, on obtient : $\sqrt[3]{0} = 0$, $\sqrt[3]{8} = 2$ et $\sqrt[3]{-1} = -1$.

   b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On sait que $\left(\sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \left(\sqrt[3]{y}\right)^3 = xy$.
   On en déduit que l'unique réel dont le cube vaut xy est : $\sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y}$. Ainsi : $\sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{xy}$.

2. a) D'après la question précédente, $\lambda \times \mu = \sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})}$.
   Or $(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2}) = 7^2 - (5\sqrt{2})^2 = 49 - 25 \times 2 = 49 - 50 = -1$.
   Ainsi : $\boxed{\lambda \times \mu = \sqrt[3]{-1} = -1}$.
   D'autre part, $\lambda^3 = 7 + 5\sqrt{2}$ et $\mu^3 = 7 - 5\sqrt{2}$ donc $\boxed{\lambda^3 + \mu^3 = 14}$.

   b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques. On a :

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\ &= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

   c) On en déduit que $(\lambda+\mu)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2\mu + 3\lambda\mu^2 + \mu^3 = \lambda^3 + \mu^3 + 3\lambda\mu(\lambda+\mu) = 14 + 3(-1)(\lambda+\mu)$.
   On a bien obtenu : $\boxed{(\lambda+\mu)^3 = 14 - 3(\lambda+\mu)}$.

3. On considère l'équation $(E) : x^3 + 3x - 14 = 0$.

a) $2^3 + 3 \times 2 - 14 = 8 + 6 - 14 = 0$, donc 2 est bien solution de l'équation.

b) On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$x^3 + 3x - 14 = (x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$.
Par identification, on doit avoir $a = 1$, $b - 2a = 0$, $c - 2b = 3$ et $-2c = -14$. On obtient $a = 1$, $b = 2$ et $c = 7$.
Ainsi, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{x^3 + 3x - 14 = (x-2)(x^2 + 2x + 7)}$.

c) On en déduit que l'équation (E) se réécrit $(x-2)(x^2 + 2x + 7) = 0$, c'est-à-dire $x = 2$ ou $x^2 + 2x + 7 = 0$.
Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 2^-4 \times 7 \times 1 = 4 - 28 = -24 < 0$, donc il n'admet aucune racine réelle. Ainsi, la seule solution de l'équation est 2, et donc :
l'ensemble des solutions de (E) est $\boxed{\mathcal{S} = \{2\}}$.

4. On a montré à la question 2 que $(\lambda + \mu)^3 = 14 - 3(\lambda + \mu)$, c'est-à-dire que $(\lambda + \mu)^3 + 3(\lambda + \mu) - 14 = 0$.
Ainsi, $\lambda + \mu$ est solution de (E), donc nécessairement : $\boxed{\lambda + \mu = 2}$.

5. On rappelle que $\lambda \times \mu = -1$, et donc $\lambda = -\dfrac{1}{\mu}$ et $\mu = -\dfrac{1}{\lambda}$.
Ainsi, l'équation $\lambda + \mu = 2$ peut se réécrire : $\lambda - \dfrac{1}{\lambda} = 2$, ou encore $-\dfrac{1}{\mu} + \mu = 2$.
Ainsi, λ et μ sont tous les deux solutions de l'équation (E') : $x - \dfrac{1}{x} = 2$.

6. Le domaine d'existence de (E') est $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, (E') se réécrit :
$x - \dfrac{1}{x} = 2 \iff \dfrac{x^2 - 1 - 2x}{x} = 0 \iff x^2 - 2x - 1 = 0$.
Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 4 + 4 = 8 > 0$, donc il possède deux racines réelles distinctes :
$x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$, et $x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$.
Reste à déterminer laquelle de ces deux solutions est λ et laquelle est μ.
On peut par exemple dire que $\lambda > 0$ puisque $7 + 5\sqrt{2} > 0$, et ainsi on a nécessairement $\lambda = 1 + \sqrt{2}$.
De même, on a nécessairement $\mu < 0$ puisque $7 - 5\sqrt{2} < 0$, et ainsi $\mu = 1 - \sqrt{2}$. En conclusion :

$$\boxed{\lambda = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \mu = \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}}$$