# DS 1 – Maths & Info

***La calculatrice est interdite.***
*On pourra admettre une question (en le précisant) pour poursuivre la résolution des exercices.*
*Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement et justifiez les choix que vous êtes amenés à faire.*
*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'évaluation, ainsi que le soin. Rappels généraux de présentation :*

- *Rédigez sur des copies doubles en laissant de la place en haut de la première page et une marge suffisante.*
- *Numérotez clairement les exercices et questions.*
- *Chaque question aura droit à une réponse finale joliment encadrée.*

---

**Exercice 1. Logique**

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Donner la négation de l'assertion $A(f)$ suivante.
   $A(f)$ : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x > A, f(x) = 0$.
2. Écrire à l'aide des quantificateurs l'assertion $B(f)$ suivante, puis sa négation.
   $B(f)$ : Si $f$ est paire, alors $f(0) = 1$.
3. Pour chacune des fonctions suivantes, dire si les assertions $A(f)$ et $B(f)$ sont vraies ou fausses. On justifiera brièvement à chaque fois.

   a) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$ b) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 0$ c) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$

**Exercice 2. Trois (in)équations**

Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

a) $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{x}{x+2}$ b) $x^3 + 8x^2 + 5x - 14 = 0$ c) $|2x+3| = x^2 - 5$

**Exercice 3. Récurrence**

On définit par récurrence une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

**Exercice 4. Différence symétrique.**

Soit $E$ un ensemble. Pour tous sous-ensembles $A, B$ de $E$, on définit leur **différence symétrique**, notée $A\Delta B$, par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

où on rappelle que $F\backslash G = F \cap \overline{G} = \{x \in F \mid x \notin G\}$. Dans tout l'exercice, on se fixe $A, B \subset E$.

1. Montrer que $A\Delta B = B\Delta A$.
2. Représenter sur un schéma la différence symétrique de $A$ et $B$.
3. Montrer que $A\Delta A = \varnothing$ et $A\Delta\varnothing = A$. Que vaut $A\Delta E$ ?
4. Montrer que $A\Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$.
5. En déduire que $\overline{A\Delta B} = \overline{A}\Delta B = A\Delta\overline{B}$.

**Exercice 5.**

L'objectif de l'exercice est de résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

$$(E) \ : \ \left\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \right\rfloor = 0$$

où on rappelle que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lfloor a \rfloor$ désigne la **partie entière** de $a$.

1. Déterminer le domaine d'existence de $(E)$.
2. **Python :**
   a) Donner l'instruction Python qui permet d'importer l'intégralité du module `math`. Dans la question suivante, on suppose que ce module est importé.
   b) On rappelle que la fonction partie entière du module `math` s'utilise à l'aide de l'instruction `floor(x)`.
   Écrire une fonction Python, appelée `est_solution`, de paramètre un nombre $x$ du domaine de définition de $(E)$, et qui renvoie :
   - `True` si $x$ est une solution de l'équation $(E)$
   - `False` sinon.
3. Dire si les réels suivants sont solution ou non de l'équation $(E)$ : $x_1 = \dfrac{1}{5}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = 1$, $x_4 = 12$. On justifiera par le calcul.
4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, rappeler un encadrement de $a$ en fonction de sa partie entière.
5. Justifier que résoudre $(E)$ est équivalent à résoudre le système :

$$\begin{cases} \sqrt{5x-1} & > & 2x-1 & \quad (E_1) \\ \sqrt{5x-1} & \leq & 2x & \quad (E_2) \end{cases}$$

6. a) Déterminer l'ensemble des solutions de $(E_1)$. On le notera $\mathcal{S}_1$.
   b) Déterminer l'ensemble des solutions de $(E_2)$. On le notera $\mathcal{S}_2$.
7. Exprimer l'ensemble des solutions de $(E)$ en fonction de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, et conclure.

**Exercice 6. Une fonction Python.**

On suppose que le module math est importé. Que fait la fonction mystère suivante ?

```
def mystère(x):
    y = sqrt(x**2)
    if y == x:
        return True
    else:
        return False
```