DS 10 – Maths & Info

*La qualité de la **rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements sont pris en compte dans l'évaluation, ainsi que le soin.*

Exercice 1. Questions de cours

1. Donner la définition d'une famille libre dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
2. Énoncer le théorème du rang.
3. Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire finie X.
4. Énoncer les propriétés des fonctions de répartitions.
5. Énoncer la formule de Kœnig-Huygens.

Exercice 2. Variables aléatoires

L'exercice étudie la modélisation d'un procédé ultra-rapide de greffes de rosiers. Lorsqu'une greffe est opérée, on sait au bout d'une semaine si elle a pris ou non. On suppose que la probabilité qu'une greffe donnée prenne est constante, égale à $p \in]0,1[$.
On veut greffer r rosiers où r est un entier supérieur ou égal à 1. Pour chacun d'entre eux, on suit le procédé suivant :

- Chaque semaine, si la greffe ne prend pas, on recommence.
- Au bout d'un nombre N fixé de semaines, si la greffe n'a toujours pas pris, on effectue à la semaine $N+1$ une greffe normale, qui prend avec probabilité 1.

Ici N est un entier supérieur ou égal à 1. On suppose que les r rosiers sont indépendants.

1. Pour tout $i \in [\![1, N+1]\!]$, on note R_i le nombre de rosiers qu'il faut greffer la i-ième semaine. Identifier les lois de R_1 et R_2, et donner sans justifier leur espérance et leur variance.

2. On fixe $k \in [\![1, r]\!]$, et on s'intéresse dans cette question au cas du k-ième rosier seul. On note G_k le nombre de greffes nécessaires avant que la greffe ne prenne sur ce rosier.
   a) Donner l'univers image de G_k, et déterminer sa loi.
   On distinguera le cas $\mathbb{P}(G_k = N+1)$.
   b) Calculer, pour tout $j \in G_k(\Omega)$, $\mathbb{P}(G_k \leq j)$.
3. On s'intéresse désormais à l'ensemble des rosiers, et on note S le nombre de semaines avant que l'ensemble des greffes aient prises.
   a) Justifier que $S = \max(G_1, \ldots, G_r)$.
   b) Montrer que pour tout $j \in [\![1, N]\!]$,on a $\mathbb{P}(S \leq j) = \left(1-(1-p)^j\right)^r$, et que $\mathbb{P}(S \leq N+1) = 1$.
   c) En déduire la loi de S.

4. On note Y le nombre de rosiers qu'on doit greffer à la semaine $N+1$.
   a) Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, identifier la loi de la variable aléatoire $\mathbb{1}_{(G_k = N+1)}$.
   b) En déduire la loi de Y.

Exercice 3. Quelques endomorphismes nilpotents

Les parties sont **entièrement indépendantes**.

A) Un exemple en dimension 2

Soit f l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (2x-4y, x-2y) \end{cases}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice A de f relativement à la base canonique.
3. Calculer A^2, en déduire f^2.
4. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$. Que remarque-t-on ?
5. Soit $u = (3,1)$. Calculer $f(u)$ et montrer que la famille $\mathcal{B} = (u, f(u))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Donner sans calcul la matrice de f dans cette base.

B) Un exemple en dimension 3

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme g canoniquement associé à la matrice J :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $g \circ g = 0$.
2. Déterminer le noyau et l'image de g.

On considère la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1,2,-1)$, $e_2 = (1,0,1)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

3. Montrer que que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$

C) Un exemple dans $\mathbb{R}_3[X]$ - Bonus si vous avez fini

Cette partie est à faire à la maison

On définit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ par $\varphi(P) = P'(X+1)$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Donner degré de $\varphi(P)$ en fonction du degré de P.
3. En déduire que φ^4 est l'application linéaire nulle sur $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Déterminer la matrice associée à φ dans la base canonique $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$.
5. On note $P_0 = X^3$, $P_1 = \varphi(P_0)$, $P_2 = \varphi(P_1)$ et $P_3 = \varphi(P_2)$.
   Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
6. Déterminer la matrice de φ dans la base de la question précédente.