DS 2 – Maths & Info

Corrigé

Exercice 1. Questions de cours

Pour cet exercice, se référer au cours.

On donnera simplement la négation de "f est croissante" : $\exists x, y \in E,\ (x \leq y \text{ et } f(x) > f(y))$.

Exercice 2. Quelques (in)équations

1. On considère l'équation $(E) : 2\ln(x) + \ln(3x+1) \geq 2\ln(2) + \ln(2x-1)$.

   a) On doit avoir simultanément :

   - $x > 0$
   - $3x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x > -\dfrac{1}{3}$
   - $2x - 1 > 0$, c'est-à-dire $x > \dfrac{1}{2}$

   Ainsi, le domaine d'existence de l'équation (E) est $\boxed{\mathcal{D} = \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[}$.

   b) Soit $x \in \mathcal{D}$. D'après les propriétés du logarithme népérien :

   - $2\ln(x) + \ln(3x+1) = \ln\left(x^2(3x+1)\right) = \ln\left(3x^3 + x^2\right)$
   - $2\ln(2) + \ln(2x-1) = \ln\left(2^2(2x-1)\right) = \ln\left(4(2x-1)\right) = \ln(8x-4)$.

   Ainsi, l'équation équivaut à : $\ln\left(3x^3 + x^2\right) \geq \ln(8x-4)$. Finalement, par **stricte croissance du logarithme népérien**, ceci est équivalent à $3x^3 + x^2 = 8x - 4$. D'où : $\boxed{(E_1) \iff 3x^3 + x^2 - 8x + 4 \geq 0}$.

   c) Le polynôme ci-dessus a comme racine évidente $x_0 = 1$, puisque $3 + 1 - 8 + 4 = 0$. On cherche donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 3x^3 + x^2 - 8x + 4 &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

   Par **identification**, on cherche donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ qui vérifient : $\begin{cases} a &= 3 \\ b - a &= 1 \\ c - b &= -8 \\ -c &= 4 \end{cases}$.

   On obtient comme unique solution : $\boxed{a = 3,\ b = 4 \text{ et } c = -4}$.

   Ainsi, on a : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, 3x^3 + x^2 - 8x + 4 = (x-1)(3x^2 + 4x - 4)}$.

   Le trinôme obtenu a pour discriminant $\Delta = 16 + 48 = 64 = 8^2 > 0$, donc il admet deux racines réelles distinctes :

$x_1 = \dfrac{-4-8}{6} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-4+8}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Ainsi, le polynôme de degré 3 a pour racines les trois réels : $\boxed{\boxed{-2,\ \frac{2}{3} \text{ et } 1}}$

Comme le trinôme a pour coefficient dominant $a = 3 > 0$, il est négatif entre ses racines, et on peut dresser le tableau de signe. On en déduit, sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{3x^3 + x^2 - 8x + 4 \geq 0 \iff x \in \left[-2, \frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty[}.$$

d) Les solutions de (E_1) sont alors éléments de $\mathcal{D}$ pour lesquels on a $3x^3 + x^2 - 8x + 4 \geq 0$. D'après la question précédente, on obtient comme ensemble de solutions :

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = \left]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty[}.$$

2. On cherche $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\sqrt{3}\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = r\cos(x+\varphi)$. On sait que :
   - $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3+3}\ \boxed{= \sqrt{6}}$.
   - φ vérifie $\cos(\varphi) = \dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et $\sin(\varphi) = -\dfrac{\sqrt{3}}{6} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   Ainsi : $\boxed{\varphi = -\dfrac{3\pi}{4} \text{ convient}}$.

   L'équation (E_2) se réécrit donc :

$$\begin{aligned}
-\sqrt{3}\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = -\sqrt{6} &\iff \sqrt{6}\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{6} \\
&\iff \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = -1 \\
&\iff x - \frac{3\pi}{4} \equiv \pi[2\pi] \text{ ou } x - \frac{3\pi}{4} \equiv -\pi[2\pi] \\
&\iff x - \frac{3\pi}{4} \equiv \pi[2\pi] \\
&\iff x \equiv \frac{7\pi}{4}[2\pi]
\end{aligned}$$

   L'ensemble des solutions réelles de (E_2) est donc : $\boxed{\mathcal{S}_2 = \left\{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

3. $2\sin^2(x) + \cos(x) - 2 > 0 \iff 2(1 - \cos^2(x)) + \cos(x) - 2 > 0 \iff -2\cos^2(x) + \cos(x) > 0$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, je pose $y = \cos(x) \in [-1, 1]$.
   Alors, l'inéquation se réécrit $-2y^2 + y = y(1-2y) > 0$. Le trinôme a pour coefficient dominant $-2 < 0$, donc il est positif entre ses racines. Ainsi : $\boxed{(E_3) \iff \cos(x) \in \left]0, \frac{1}{2}\right[}$.
   D'après le cercle trigonométrique, l'ensemble des solutions de (E_3) sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ est alors :

$$\boxed{\mathcal{S}_3 = \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right[}.$$

Exercice 3. Étude d'une application

On considère dans tout cet exercice l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$

1. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0.
   Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. On a : $f(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = -f(x)$.
   On en déduit que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire}}$.

2. a) On considère d'abord l'inéquation $-\sqrt{m^2+1} < m \iff \sqrt{m^2+1} > -m$ d'inconnue $m \in \mathbb{R}$. Son domaine d'existence est bien $\mathbb{R}$ puisque pour tout $m \in \mathbb{R}$, $m^2+1 \geq 0+1 \geq 0$.
   - Si $-m \geq 0$, c'est-à-dire pour $m \in]-\infty, 0]$, alors on peut élever au carré, et l'inéquation devient :
     $m^2+1 > m^2$, c'est-à-dire $1 > 0$, ce qui est toujours vrai.
   - Si $-m < 0$, c'est-à-dire pour $m \in \mathbb{R}_+^*$, alors l'inéquation est toujours vraie, puisqu'alors $\sqrt{m^2+1} \geq 0 > -m$.
   - Dans tous les cas, l'inéquation est toujours vraie, donc son ensemble de solutions est bien $\mathbb{R}$ tout entier.

   b) On considère ensuite l'inéquation $m < m^2+1$ d'inconnue $m \in \mathbb{R}$. Par exactement le même raisonnement :
   - Le domaine d'existence est encore $\mathbb{R}$.
   - Si $m \in [0, +\infty[$, l'inéquation devient $m^2 < m^2+1$, ce qui es toujours vrai.
   - Si $m \in]-\infty, 0[$, l'inéquation est toujours vraie.
   - Donc l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

   c) Finalement, on a bien montré que les deux inéquations sont vraies sur $\mathbb{R}$, et donc : $\boxed{\forall m \in \mathbb{R},\ -\sqrt{m^2+1} < m < \sqrt{m^2+1}}$.

   Autre méthode, beaucoup plus rapide :
   $\sqrt{m^2+1} > \sqrt{m^2} = |m|$, et on a bien $-|m| \leq m \leq |m|$ par définition de la valeur absolue.

3. Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = m \iff e^x - e^{-x} = 2m$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $y = e^x \in \mathbb{R}_+^*$. L'équation devient alors :
   $y - \dfrac{1}{y} = 2m \iff \dfrac{y^2 - 2my - 1}{y} = 0 \iff y^2 - 2my - 1 = 0$ puisque $y > 0$.
   Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 4m^2 + 4 = 4(m^2+1) > 0$, donc il admet deux racines réelles distinctes, données par :
   $y_1 = \dfrac{2m - \sqrt{4(m^2+1)}}{2} = m - \sqrt{m^2+1}$ et $y_2 = m + \sqrt{m^2+1}$.
   D'après la question précédente, on sait que $y_1 < 0$ et $y_2 > 0$, donc comme $y \in \mathbb{R}_+^*$, seule la racine y_2 convient.
   Ainsi, l'équation est équivalente à $e^x = m + \sqrt{m^2+1}$, donc elle admet une $\boxed{\text{unique solution}}$:
   $\boxed{x = \ln\left(m + \sqrt{m^2+1}\right)}$.

4. On a montré que tous les éléments $m \in \mathbb{R}$ de l'ensemble d'arrivée de f admettaient exactement un antécédent par la fonction f : c'est la définition de la bijectivité.
   f est donc bien $\boxed{\text{bijective}}$, et sa réciproque est l'application $\boxed{f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ m & \mapsto & \ln\left(m + \sqrt{m^2+1}\right) \end{array} \right.}$

Exercice 4. Calcul de $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(5\theta) = 0 \iff 5\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $5\theta \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, ce qui peut se simplifier en $5\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

   On en déduit que les solutions sont exactement les $\theta \in \mathbb{R}$ qui vérifient : $\boxed{\theta \equiv \dfrac{\pi}{10}\left[\dfrac{\pi}{5}\right]}$

   Dans le cercle trigonométrique, on obtient **dix points** ! Ils sont placés au niveau de $\dfrac{\pi}{10}$, $\dfrac{3\pi}{10}$, $\dfrac{5\pi}{10} = \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{7\pi}{10}$, $\dfrac{9\pi}{10}$, et leurs opposés.

2. a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a les formules suivantes :
   - $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
   - $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
   - $\sin(2a) = \sin(a+a) = 2\cos(a)\sin(a)$

   b) On en déduit de la même manière :

$$\begin{aligned}
\cos(3a) &= \cos(2a+a) \\
&= \cos(2a)\cos(a) - \sin(2a)\sin(a) \\
&= (2\cos^2(a) - 1)\cos(a) - 2\cos(a)\sin(a)\sin(a) \\
&= 2\cos^3(a) - \cos(a) - 2\cos(a)\sin^2(a) \\
&= 2\cos^3(a) - \cos(a) - 2\cos(a)(1 - \cos^2(a)) \\
&= 2\cos^3(a) - \cos(a) - 2\cos(a) + 2\cos^3(a) \\
&= 4\cos^3(a) + 3\cos(a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(3a) &= \sin(2a+a) \\
&= \cos(2a)\sin(a) + \sin(2a)\cos(a) \\
&= (2\cos^2(a) - 1)\sin(a) + 2\cos^2(a)\sin(a) \\
&= (4\cos^2(a) - 1)\sin(a)
\end{aligned}$$

On admet pour la suite qu'on peut obtenir de la même manière :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \cos(5a) = \cos(a)\left(16\cos^4(a) - 20\cos^2(a) + 5\right)$$

3. D'après le résultat admis, on sait que
   $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)\left(16\cos^4\left(\dfrac{\pi}{10}\right) - 20\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right) + 5\right) = \cos\left(5 \times \dfrac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$
   Donc A est bien solution de l'équation (E_4).
   De la même manière, en remplaçant x par B, on obtient $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$, etc.
   Ainsi, $\boxed{\text{les réels donnés sont bien tous solutions de l'équation } (E_4)}$.

4. On a d'abord $(E_4) \iff x = 0$ ou $16x^4 - 20x + 5 = 0$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $y = x^2 \in \mathbb{R}_+$. On a alors :
   $16x^4 - 20x + 5 = 0 \iff 16y^2 - 20y + 5 = 0$.
   Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 400 - 320 = 80 > 0$, donc il admet deux racines distinctes : $y_1 = \dfrac{20 - \sqrt{80}}{32} = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{8}$ et $y_2 = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{8}$.
   Comme ces deux nombres sont strictement positifs, on obtient que l'ensemble des solutions de (E_4) est :

$$\boxed{\mathcal{S}_4 = \left\{0, -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right\}}$$

5. a) Pour le graphe de la fonction cosinus, voir le cours. Cette fonction est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \pi]$.

   b) Comme $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{3\pi}{10} < \frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{10} < \frac{9\pi}{10} < \pi$, par stricte décroissance de la fonction cosinus, on obtient pour les images : $\boxed{1 > A > B > C > D > E > -1}$.

6. Les réels A, B, C, D, E sont tous distincts et tous solutions de (E_4), donc il s'agit exactement des 5 solutions obtenues à la question 4.

   Comme A est le plus grand de ces réels on obtient : $\boxed{A = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}$.

7. a) Comme $\frac{\pi}{10} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on sait que $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) > 0$, et donc d'après les formules de trigonométrie : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)} = \sqrt{1 - \frac{5+\sqrt{5}}{8}} \boxed{= \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}}$.

   b) $\cos\left(\frac{6\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \boxed{= -\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$.

   c) $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{10}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) - 1 = 2 \times \frac{5+\sqrt{5}}{8} - 1 \boxed{= \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$.

Exercice 5. Python : Une somme qui converge

1.
```
s = 1
for k in range(2, 51):
    s = s + 1 / k**2
print(somme)
```

2.
```
def somme(n):
    s = 0
    for k in range(1, n+1):
        s = s + 1 / k**2
    return s
```

3. On admet que la suite (S_n) converge vers $l = \frac{\pi^2}{6}$.

   a) L'instruction Python permettant d'utiliser la constante π est : `from math import pi`

   b) On n'oublie pas d'utiliser la fonction `somme(n)` déjà codée !

```
from math import pi
n = 1
l = pi**2 / 6
while abs(somme(n) - l) > 10**(-6):
        n = n+1
print(n)
```

Exercice 6. Python : lancer de fléchettes

1. On rappelle que la fonction ne prend pas d'argument, et renvoie un flottant aléatoire choisi uniformément dans l'intervalle $[0, 1[$.

   a) L'instruction permettant d'importer la fonction `random` du module `random` est : `from random import random`
   Dans la suite, on suppose que ceci a été fait.

b) $y \in [-3,3[\iff y+3 \iff [0,6[\iff \dfrac{y+3}{6} \in [0,1[$.

On veut avoir $x = \dfrac{y+3}{6}$ un nombre aléatoire choisi uniformément dans $[0,1[$, donc $y = 6x - 3$ où `x=random()`.

Ainsi, on obtient la fonction suivante :

```
def coord_aléatoire():
    a = 6
    b = -3
    return a * random() + b
```

2. Pour connaître le nombre de points, il suffit de calculer la distance de (x,y) à l'origine.

```
from math import sqrt
def fléchette():
    x = coord_aléatoire()
    y = coord_aléatoire()
    r = sqrt(x**2 + y**2)
    if r <= 1:
        return 10
    elif r <= 2:
        return 5
    elif r <= 3:
        return 1
    else:
        return 0
```

3.
```
def score(n):
    s = 0
    for i in range(n):
        s = s + fléchette()
    return s
```

4.
```
def nombre_de_fléchettes(p):
    s = 0
    n = 0
    while s < p:
        s = s + fléchette()
        n = n + 1
    return n
```

5. a) On gagne au moins un point si la fléchette arrive dans le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 3. Ce disque a une aire de $\pi \times 3^2 = 9\pi$.

L'aire totale de la cible est de $6 \times 6 = 36$.

En lançant la fléchette uniformément sur la cible, on en déduit que la probabilité d'obtenir au moins un point est le rapport des deux aires, à savoir : $\dfrac{9\pi}{36} = \dfrac{\pi}{4}$.

b)
```
def proportion(n):
    nb_gagnantes = 0
    for k in range(n):
        if fléchette() > 0:
            nb_gagnantes = nb_gagnantes + 1
    prop = nb_gagnantes / n
    return prop
```

c) Lorsque n est grand, on peut imaginer que le nombre `proportion(n)` doit s'approcher de la probabilité calculée à la question précédente, à savoir $\dfrac{\pi}{4}$. Ce résultat est en fait la *loi des grands nombres*.

Ainsi, pour calculer une valeur approchée de π, il suffit de calculer le nombre `4*proportion(n)` pour n assez grand.

Reste une question : comment savoir que n est "assez grand" ?…