

DS 2 – Maths & Info

La calculatrice est interdite.

Le sujet peut être réalisé dans l'ordre de votre choix, mais n'oubliez pas d'indiquer clairement le numéro des exercices et questions.

On pourra toujours admettre une question (en le précisant) pour poursuivre la résolution des exercices. Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement et justifiez les choix que vous êtes amenés à faire.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'évaluation, ainsi que le soin.

Exercice 1. Trigonométrie : deux (in)équations en une récurrence

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 0$
2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{x^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}x - 1}{x} < 0$.
b) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation suivante dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On commencera par donner son domaine d'existence.

$$\tan(x) + \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leq n |\sin(x)|$.

Exercice 2. Une fonction trigonométrique

Soit f une fonction définie par l'expression : $f(x) = \cos^4(x) + 2 \sin(x) \cos(x) - \sin^4(x)$.

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Calculer $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$.
4. En déduire une écriture de $f(x)$ sous la forme $r \cos(2x + \varphi)$ avec $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.
5. Calculer d'une seconde manière les images obtenues à la question 2. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
6. Déterminer l'image directe $f(\mathbb{R})$.
7. Démontrer que la fonction f est périodique, et en donner une période $T \in]0, 2\pi[$.
8. Donner dans l'ordre les trois transformations géométriques à réaliser à partir du graphe de la fonction cosinus pour obtenir rapidement le graphe de f .
9. Déterminer les équations des tangentes à la courbe en $x = \frac{\pi}{8}$ et $x = \frac{3\pi}{8}$.

Exercice 3. Étude d'une fonction

Soit f définie sur son domaine de définition $\mathcal{D}$ par : $f : \begin{cases} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \end{cases}$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f .
2. Étudier la parité de l'application f .
3. Résoudre en fonction des valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'équation à paramètre $f(x) = m$.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ? Justifier soigneusement.

5. Montrer que la restriction $g : \begin{cases} \mathcal{D} \rightarrow f(\mathcal{D}) \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ est bijective, et déterminer sa réciproque.

Exercice 4. Modélisation Python

Le modèle de Verhulst, qui date d'environ 1840, permet de modéliser l'évolution d'une population, en considérant que les taux de natalité et de mortalité sont des fonctions affines respectivement décroissante et croissante de la taille de la population.

Concrètement, on peut alors modéliser l'évolution de la population chaque mois par une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie la relation de récurrence suivante :

$$P_{n+1} - P_n = aP_n \left(1 - \frac{P_n}{K}\right)$$

où a, K sont des constantes positives fixées.

1. On suppose qu'une population compte initialement 50 000 habitants, et que son évolution suit le modèle de Verhulst avec $a = 0,05$ et $K = 150\,000$. Écrire une fonction Python `population(n)` qui prend en paramètre un mois n , et qui renvoie la population après n mois.
2. Quelle instruction faut-il alors écrire pour afficher la valeur de la population après 19 ans ?
3. Écrire un programme Python qui détermine et affiche le nombre de mois qu'il faudra pour que la population dépasse 120 000.

Exercice 5. Problème : Moyenne arithmético-géométrique.

Pour tous nombres $a, b \in \mathbb{R}$, leur moyenne *arithmétique* est donnée par $M(a, b) = \frac{a+b}{2}$.

Si a et b sont positifs, on définit leur moyenne *géométrique* par $m(a, b) = \sqrt{ab}$.

1. a) Écrire une fonction Python `moy_arith(a,b)` qui prend en paramètre deux nombres a et b , et qui renvoie leur moyenne arithmétique.
b) Donner une commande qui permet d'utiliser la fonction `sqrt` du module `math` de Python. Dans la suite, on suppose qu'on a importé `sqrt`.
c) Écrire une fonction `moy_géom(a,b)` qui prend en paramètre deux nombres a et b , et qui :
 - affiche le message "Les paramètres doivent être positifs !" si ce n'est pas le cas ;
 - renvoie la moyenne géométrique de a et b sinon.

2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$ tels que $x \leq y$, on a : $x \leq m(x, y) \leq M(x, y) \leq y$.
On s'occupera séparément de chacune des trois inégalités, et on pensera à développer $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ avec $a \leq b$. On définit deux suites de réels positifs $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_{n+1} = m(u_n, v_n) = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = M(u_n, v_n) = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

On admet dans cette question que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune l , appelée la **moyenne arithmético-géométrique** de a et b . De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq l \leq v_n$.

Recopier et compléter la fonction Python suivante pour qu'elle donne un encadrement de la moyenne arithmético-géométrique de a et b à 10^{-5} près.

```

1 def MAG(a, b):
2     u = .....
3     v = .....
4     while ..... :
5         u, v = moy_géom(u, v), moy_arith(u, v)
6     return (u, v)

```

4. *Pour ceux qui ont fini* : la fin du problème vise à prouver le résultat admis à la question précédente.
- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$.
 - En déduire le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) .
 - Déduire des questions précédentes que pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on a $u_p \leq v_q$.
On pourra séparer le cas $p \leq q$ et le cas $p > q$.
5. On pose $\mathcal{U} = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\mathcal{V} = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Justifier l'existence de $l = \sup \mathcal{U}$ et $l' = \inf \mathcal{V}$.
 - Montrer que $l \leq l'$.
 - On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n = v_n - u_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq d_n \leq \frac{b-a}{2^n}$. On utilisera la majoration $d_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n$.
 - En déduire que $l = l'$, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.