DS 3 – Maths & Info

La calculatrice est interdite.
On pourra admettre une question (en le précisant) pour poursuivre la résolution des exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'évaluation, ainsi que le soin.

Exercice 1.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Rappeler le lien entre $z, \overline{z}$ et $|z|$ d'une part, et entre $z, \overline{z}$ et $\mathrm{Re}(z)$ d'autre part.
2. Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$.
3. En déduire une preuve de l'inégalité triangulaire.

Exercice 2.

On considère les complexes $z_1 = 4\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$ et $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$

1. Mettre z_1 sous forme algébrique, et mettre z_2 sous forme exponentielle.
2. En déduire les formes algébrique et exponentielle de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

Exercice 3. Étude d'une famille de fonctions

Dans cette exercice, on cherche à étudier les fonctions de la forme

$$f_a(x) = \exp\left(\frac{a-x}{x^2}\right) \quad \text{où } a \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer le domaine $\mathcal{D}$ de définition de f_a.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Déterminer les positions relatives des courbes représentatives de f_a et f_b.
3. Justifier que f_a est dérivable sur son domaine de définition et montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a : $\quad f_a'(x) = \dfrac{x-2a}{x^3}\exp\left(\dfrac{a-x}{x^2}\right)$.

A – Cas $a = 0$

4. Étudier la fonction $f_0(x) = e^{-\frac{1}{x}}$: variations, limites, allure de la courbe.

B – Cas $a > 0$

5. Dresser le tableau de variations de f_a et calculer les limites aux bornes du domaine.
6. La fonction f_a est-elle majorée ? minorée ? bornée ? Donner ses extremums.
7. Donner les équations des éventuelles asymptotes verticales et horizontales de f_a.
8. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f_a en a.

C – Cas $a < 0$

9. Montrer que dans ce cas, la fonction f_a n'admet pas d'asymptote verticale.
10. Dresser le tableau de variations de f_a.

Conclusion

11. Tracer dans un même repère les graphes des fonctions f_0, f_1, f_2 et f_{-1}. On fera apparaître les asymptotes et tangentes déterminées au cours de l'exercice.

Exercice 4. Deux méthodes pour calculer $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I - Avec les racines 5-ièmes de l'unité

On considère l'équation (F) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ donnée par :

$$(F) : (z+1)^5 = (z-1)^5$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^5 = 1$, et représenter les solutions dans le plan complexe.
2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}\setminus(2\pi\mathbb{Z})$, simplifier l'expression $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$, à l'aide de la méthode de l'angle moitié.
3. En déduire que les solutions de (F) sont exactement

$$\frac{-i}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}, \frac{-i}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)}, \frac{-i}{\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)} \text{ et } \frac{-i}{\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)}$$

4. On admet que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.
   Montrer que l'équation (F) est équivalente à $(F') : 5z^4 + 10z^2 + 1 = 0$
5. En déduire que les solutions de (F) sont

$$i\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}, -i\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}, i\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}, -i\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

6. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Partie II - une équation réelle pour le cosinus

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ à l'aide de la formule d'Euler.
   On pourra admettre que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
2. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $(E) : 8X^4 - 8X^2 + X + 1 = 0$.
3. Vérifier que $\frac{1}{2}$ est solution de (E).
4. Résoudre (E) après en avoir déterminé une autre solution évidente.
5. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
6. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.