DS 4 – Maths & Info

Corrigé

Exercice 1. Système à paramètre

On considère le système suivant, de paramètre m et d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(S_m)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} mx & - & m^2y & + & mz & = & 1 \\ x & - & my & + & m^2z & = & m \\ mx & + & y & - & m^3z & = & -1 \end{array}\right.$$

1. Dans le cas $m = -1$, le système devient :

$$(S_{-1})\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & -1 \\ -x & + & y & + & z & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x & - & y & - & z & = & 1 & \\ & & & & 0 & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ & & 2y & + & 2z & = & -2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x & - & y & - & z & = & 1 & \\ & & 2y & + & 2z & = & -2 & \\ & & & & 0 & = & 0 & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array}\right.$$

On a un système échelonné compatible, $\boxed{\text{de rang } 2}$, avec z comme inconnue secondaire. (S_1) admet donc une infinité de solutions, et on a :

$$(S_1) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & y & = & 1 & + & z \\ & & 2y & = & -2 & - & 2z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -1 - z \\ x & = & -1 - z - y = 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (S_1) est : $\boxed{\mathcal{S}_1 = \{(0, -1 - z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}}$.

2. On applique le pivot de Gauss au système (S_m). On a :

$$(S_m) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & my & + & m^2z & = & m & \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 1 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ mx & + & y & - & m^3z & = & -1 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & my & + & m^2z & = & m & \\ & & & + & (m - m^3)z & = & 1 - m^2 & L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ & & (1 + m^2)y & - & 2m^3z & = & -1 - m^2 & L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & my & + & m^2z & = & m & \\ & & (1 + m^2)y & - & 2m^3z & = & -1 - m^2 & \\ & & & + & m(1 - m^2)z & = & 1 - m^2 & L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array}\right.$$

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, le coefficient $1 + m^2$ est non nul (> 0). On a :

- Si $\underline{m \notin \{-1,0,1\}}$, les coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc le système obtenu est triangulaire. Il est donc de Cramer : il admet une $\boxed{\text{unique solution}}$.
- Si $\underline{m \in \{-1,1\}}$, alors $1-m^2=0$ donc on a :

$$(S_m) \iff \begin{cases} x & - & my & + & m^2z & = & m \\ & & (1+m^2)y & - & 2m^3z & = & -1-m^2 \\ & & & + & 0 & = & 0 \end{cases}$$

  On a un système échelonné compatible de rang 2 avec z comme inconnue secondaire : il admet une $\boxed{\text{infinité de solutions}}$.
- Enfin, si $\underline{m=0}$, alors la ligne 3 devient $0=1$, et donc le système est incompatible : il n'admet $\boxed{\text{aucune solution}}$.

3. Si m peut prendre des valeurs complexes, alors le coefficient m^2+1 peut s'annuler, pour $m=i$ et $m=-i$. Or le système obtenu par pivot de Gauss est de Cramer si et seulement si les coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi :
   $\boxed{(S_m) \text{ est de Cramer } \iff m \in \mathbb{C}\backslash\{-1,0,1,-i,i\}.}$

Exercice 2.

1. On applique la formule du binôme : $\forall a,b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N} : (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$.
   Le triangle de Pascal permet d'obtenir les coefficients : $1,6,15,20,15,6,1$.
   Ainsi : pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\boxed{(1-z)^6 = 1-6z+15z^2-20z^3+15z^4-6z^5+z^6}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
   a) $\displaystyle\prod_{i=2}^{n} \exp\left(2^{-i}\right) = \exp\left(\sum_{i=2}^{n} 2^{-i}\right)$. Or :

$$\sum_{i=2}^{n} 2^{-i} = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$$

   Ainsi : $\displaystyle\prod_{i=2}^{n} \exp\left(2^{-k}\right) = \exp\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) \boxed{= \frac{\sqrt{e}}{\exp\left(\frac{1}{2^n}\right)}}$

   b) On sait, par le binôme de Newton, que $(1+e)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^k$. D'où :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \exp(k) = (1+e)^n - \binom{n}{0}e^0 - \binom{n}{n}e^n \boxed{= (1+e)^n - 1 - e^n}$$

c) On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i<j\le n} \frac{i^2}{2j-1} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} \frac{i^2}{2j-1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1} \sum_{i=1}^{j-1} i^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1} \frac{(j-1)(j-1+1)(2(j-1)+1)}{6} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j-1)(2j-1)}{6(2j-1)} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n} j(j-1) \\
&= \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n} (j^2-j) \\
&= \frac{1}{6}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} j\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{36}(2n+1-3) = \frac{n(n+1)(2n-1)}{36} \\
&\boxed{= \frac{(n-1)n(n+1)}{18}}
\end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite calculer le produit suivant :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{(2^k)}\right)$$

a)
```python
def calcule_produit(x, n):
    prod = 1
    for k in range(1, n + 1):
        prod = prod * (1 + x**(2**k))
    return prod
```

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{P_0 = 1 + x^{(2^0)} = 1 + x}$.

Soit $x = 1$, et $n \in \mathbb{N}$. Alors, $P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+1)\boxed{= 2^{n+1}}$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose H_n la propriété : $P_n = \dfrac{1 - x^{(2^{n+1})}}{1-x}$. Montrons par récurrence que H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation $(n = 0)$: on a vu que $P_0 = 1 + x$. Or $\dfrac{1 - x^{(2^{0+1})}}{1-x} = \dfrac{1-x^2}{1-x} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1 + x$.
  On a bien égalité, donc H_0 est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que H_n est vraie. Montrons que H_{n+1} est encore vraie.

On a :

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= P_n \times \left(1 + x^{(2^{n+1})}\right) \\
&= \frac{\left(1 - x^{(2^{n+1})}\right)\left(1 + x^{(2^{n+1})}\right)}{1-x} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1^2 - \left(x^{(2^{n+1})}\right)^2}{1-x} && \text{par identité remarquable} \\
&= \frac{1 - x^{2\times(2^{n+1})}}{1-x} \\
&= \frac{1 - x^{\left(2^{n+1+1}\right)}}{1-x}
\end{aligned}$$

H_{n+1} est bien vraie, d'où l'hérédité.

Ainsi, par principe de récurrence, on a bien montré que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : P_n = \frac{1 - x^{(2^{n+1}}}{1-x}}$

Exercice 3. Des systèmes linéaires en Python

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Dans cet exercice, on représente des équations linéaires à p inconnues par des listes de taille $p+1$ contenant les coefficients de l'équation dans l'ordre, en finissant par le coefficient du second membre. Ainsi :
`[a_1, a_2, …, a_n, b]` représente l'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_px_p = b$.
Par exemple, l'équation $3x - 2y - z = 5$ est représentée par la liste `[3, -2, -1, 5]`.
De même, une solution éventuelle $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ est représentée par une liste de longueur p.

1. a)

```python
def somme_combinée(A, B):
    somme = 0
    for i in range(len(A)):
        somme += A[i]*B[i]
    return somme
```

b)

```python
def est_solution(E,X):
    membre_gauche = E[:-1]
    membre_droit = E[-1]
    if somme_combinée(membre_gauche, X) == membre_droit:
        return True
    else:
        return False
```

2.

```python
def compte_zéros(E):
    nombre_zéros = 0
    for coef in E:
        if coef == 0:
            nombre_zéros += 1
        else :
            return nombre_zéros
    return nombre_zéros
```

Autre possibilité, avec une boucle while :

```python
def compte_zéros(E):
    nombre_zéros = 0
    i = 0
    while E[i] == 0:
        nombre_zéros += 1
        i += 1
    return nombre_zéros
```

3. On représente un système linéaire de n équations à p inconnues par une liste S dont les éléments sont les listes représentant les équations du système. Il s'agit donc d'une liste de listes !
   L'instruction `len(S)` renvoie alors le *nombre d'équations* du système.
   On supposera dans la suite que tous les systèmes représentés en Python ont bien un sens mathématiquement et ont au moins une équation.
   a) La liste Python qui représente le système $(S)\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 0 \\ 2x & - & y & = & 3\end{array}\right.$ est :
   `L = [[1, 2, 0], [2, -1, 3]]`
   b) Chaque équation du système est une liste de taille $p+1$, ou p est le nombre d'inconnues. Le nombre d'inconnues est donc la longueur de n'importe quelle équation moins 1.

```python
def nb_inconnues(S):
    return len(L[0]) - 1
```

   c)

```python
def est_solution_système(S, X):
    for E in S:
        if not est_solution(E, X):
            return False
    return True
```

4.

```python
def est_échelonné(S):
    n = len(S)
    p = nb_inconnues(S)
    for i in range(n-1):
        if compte_zeros(S[i]) >= p:    # si la ligne i est triviale
            if compte_zeros(S[i+1]) < p :
                return False
        else:
            if compte_zeros(S[i+1]) <= compte_zeros(S[i]) :
                return False
    return True
```

Exercice 4. Problème : Formule de Pascal et sommes classiques

1. a) Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Le coefficient binomial $\binom{b}{a}$ est défini comme étant le nombre de manières de choisir a éléments dans un ensemble contenant b éléments.
   Pour $a \leq b$, ce nombre vaut : $\displaystyle\binom{b}{a} = \frac{b!}{a!(b-a)!}$.

   b) **Formule de Pascal :** $\forall k, n \in \mathbb{N} : \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

2. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite, et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} u_i - \sum_{i=0}^{n} u_i \\ &= u_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{i=1}^{n} u_i - u_0 \\ &\boxed{= u_{n+1} - u_0}\end{aligned}$$

   C'est bien le résultat cherché.

3. On rappelle que pour $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a > b$, on pose par convention $\binom{b}{a} = 0$.
   Soient $p, n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Pascal, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k+1}{p+1}$.
   On définit la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par : $u_k = \binom{k}{p+1}$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0 = \binom{n+1}{p+1} - \binom{0}{p+1} \boxed{= \binom{n+1}{p+1}}$$

   puisque $p + 1 > 0$ donc $\binom{0}{p+1} = 0$.

Partie 1 - Sommes des entiers, des carrés et des cubes.

4. D'après la formule obtenue à la question précédente appliquée à $p = 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1} = \binom{n+1}{1+1} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2!} \boxed{= \frac{n(n+1)}{2}}$$

   Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\binom{k}{1} = k$. On a donc retrouvé la formule de la somme des premiers entiers :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

5. a) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$. On a :$a\binom{k}{2} + b\binom{k}{1} = a\dfrac{k(k-1)}{2} + bk = \dfrac{a}{2}k^2 + \left(b - \dfrac{a}{2}\right)k$.
   On souhaite donc trouver $a, b \in \mathbb{Z}$ qui vérifient : $\forall k \in \mathbb{N}, k^2 = \dfrac{a}{2}k^2 + \left(b - \dfrac{a}{2}\right)k$.
   Par <u>identification</u>, il suffit de trouver $a, b \in \mathbb{Z}$ qui vérifient le système : $\begin{cases} b - \frac{a}{2} = 0 \\ \frac{a}{2} = 1 \end{cases}$
   Ce système étant triangulaire, il admet une unique solution, donnée par $\boxed{a = 2 \text{ et } b = 1}$.
   On a bien $a, b \in \mathbb{Z}$.
   Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{k^2 = 2\binom{k}{2} + \binom{k}{1}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente et la question 3, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{2} + \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1} = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$

Or $\binom{n+1}{3} = \dfrac{(n+1)n(n-1)}{6}$ et $\binom{n+1}{2} = \dfrac{(n+1)n}{2}$, donc on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{6}\left(2(n-1)+3\right) \boxed{= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

6. Cherchons $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k^3 = a\binom{k}{3} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{1}$.
Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
a\binom{k}{3} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{1} &= a\frac{k(k-1)(k-2)}{6} + b\frac{k(k-1)}{2} + ck \\
&= a\frac{k^3-3k^2+2k}{6} + b\frac{k^2-k}{2} + ck \\
&= \frac{a}{6}k^3 + \frac{b-a}{2}k^2 + \left(c - \frac{b}{2} + \frac{a}{3}\right)
\end{aligned}$$

Par identification, il suffit de trouver $a, b, c \in \mathbb{Z}$ qui vérifient le système :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc}
c & - & \frac{b}{2} & +\frac{a}{3} & = & 0 \\
 & & \frac{b}{2} & - & \frac{a}{2} & = & 0 \\
 & & & & \frac{a}{6} & = & 1
\end{array}\right.$$

On a encore un système triangulaire, qui a donc une unique solution, qui s'obtient en trouvant la valeur des inconnues en remontant de bas en haut.
On a $\boxed{a = 6,\ b = a = 6 \text{ et } c = \frac{b}{2} - \frac{a}{3} = 3 - 2 = 1}$.
Ainsi, on a :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^3 = 3\binom{k}{3} + 6\binom{k}{2} + \binom{k}{1}}$$

On applique désormais la question 3, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^3 &= 6\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{3} + 6\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{2} + \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1} \\
&= 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\
&= 6\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24} + 6\frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{(n+1)n}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(n^2-3n+2)}{4} + n(n+1)(n-1) + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{4}(n^2-3n+2+4(n-1)+2) \\
&= \frac{n(n+1)}{4}(n^2+n) \\
&= \frac{n(n+1)n(n+1)}{4} \boxed{= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

Partie 2 - Suite harmonique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} H_k &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} \frac{1}{i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}(n-i+1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n+1}{i} - \frac{i}{i} \right) \\ &= (n+1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &\boxed{= (n+1)H_n - n}\end{aligned}$$

8. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k &= \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} \binom{k}{m} \frac{1}{i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{m} \frac{1}{i} \\ &\boxed{= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m}}\end{aligned}$$

9. D'après l'égalité de la question 3, on sait que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{k=i}^{n} \binom{k}{m} = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} - \sum_{k=1}^{i-1} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} - \binom{i}{m+1}$$

D'où, en remplaçant dans la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \left(\binom{n+1}{m+1} - \binom{i}{m+1} \right) \\ &= \binom{n+1}{m+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \binom{i}{m+1} \\ &\boxed{= \binom{n+1}{m+1} H_n - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \binom{i}{m+1}}\end{aligned}$$

10. a) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$, avec $a \leq b$.

- D'une part, $a\binom{b}{a} = a\dfrac{b!}{a!(b-a)!} = \dfrac{b!}{(a-1)!(b-a)!}$ puisque $a \leq b$ et $a! = a \times (a-1)!$
- D'autre part, $b\binom{b-1}{a-1} = b\dfrac{(b-1)!}{(a-1)!(b-1-a+1)!} = \dfrac{a!}{(a-1)!(b-a)!}$ puisque $a-1 \leq b-1$ et $b \times (b-1)! = b!$.
- On a donc $\boxed{a\binom{b}{a} = b\binom{b-1}{a-1}}$, et ce pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \leq b$

Pour $a > b$, on a $\binom{b}{a} = \binom{b-1}{a-1} = 0$ donc $\boxed{\text{l'égalité est encore vraie}}$.

b) Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $(m+1)\binom{i}{m+1} = i\binom{i-1}{m}$, et donc $\dfrac{1}{i}\binom{i}{m+1} = \dfrac{1}{m+1}\binom{i-1}{m}$.
En remplaçant dans la dernière formule obtenue, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m}H_k &= \binom{n+1}{m+1}H_n - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\binom{i}{m+1} \\
&= \binom{n+1}{m+1}H_n - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m+1}\binom{i-1}{m} \\
&= \binom{n+1}{m+1}H_n - \frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{n}\binom{i-1}{m} \\
&= \binom{n+1}{m+1}H_n - \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{m} \\
&\boxed{= \binom{n+1}{m+1}H_n - \frac{1}{m+1}\binom{n}{m+1}}
\end{aligned}$$

en appliquant une nouvelle fois le résultat de la question 3.

c) D'après la formule de Pascal, on peut écrire $\binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1} - \binom{n}{m}$.
D'après le truc du Chef, démontré à la question 10a, on a $(m+1)\binom{n+1}{m+1} = (n+1)\binom{n}{m}$ donc $\binom{n}{m} = \dfrac{m+1}{n+1}\binom{n+1}{m+1}$.
En combinant ces deux égalités, on obtient $\binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1} - \dfrac{m+1}{n+1}\binom{n+1}{m+1}$, et donc $\dfrac{1}{m+1}\binom{n}{m+1} = \dfrac{1}{m+1}\binom{n+1}{m+1} - \dfrac{1}{n+1}\binom{n+1}{m+1}$.
Finalement, en remplaçant dans la dernière formule obtenue, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m}H_k &= \binom{n+1}{m+1}H_n - \frac{1}{m+1}\binom{n}{m+1} \\
&= \binom{n+1}{m+1}H_n - \frac{1}{m+1}\binom{n+1}{m+1} + \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{m+1} \\
&= \binom{n+1}{m+1}\left(H_n - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}\right) \\
&\boxed{= \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\right)}
\end{aligned}$$

puisque $H_{n+1} = H_n + \dfrac{1}{n+1}$.

11. Pour retrouver la formule de la question 7, on doit appliquer la question précédente à $\underline{m = 0}$.

En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\binom{k}{0} = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} H_k &= \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{0} H_k \\
&= \binom{n+1}{1} (H_{n+1} - 1) \\
&= (n+1)\left(H_n + \frac{1}{n+1} - 1\right) \\
&= (n+1)H_n + 1 - (n+1) \boxed{= (n+1)H_n - n}
\end{aligned}$$

C'est bien le résultat de la question 7.