DS 5 – Maths & Info

Corrigé

Exercice 1.

1. Calcul d'intégrales :

   a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(2x+1)^3}dx = \left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{-2}(2x+1)^{-2}\right]_0^2 = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(2x+1)^2}\right]_0^2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5^2}-1\right) = \frac{24}{4\times 25} = \boxed{\frac{6}{25}}$.

   b) On pose $u = e^t$, et donc $du = e^t dt$. u va alors de 1 à e, et l'intrégrale devient :
   $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-t}}dt = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^{-t})e^t}e^t dt = \int_0^1 \frac{1}{e^t+1}e^t dt = \int_1^e \frac{1}{u+1}du$
   D'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-t}}dt = [\ln(u+1)]_1^e = \ln(e+1)-\ln(2) = \boxed{\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}$.

2. a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a $a + \dfrac{b}{1+x^2} = \dfrac{a(1+x^2)+b}{1+x^2} = \dfrac{ax^2+a+b}{1+x^2}$.
   Par identification, on cherche donc $a, b \in \mathbb{R}$ qui vérifient $a = 1$ et $a + b = 0$. Ainsi : $\boxed{a = 1 \text{ et } b = -1}$ conviennent.
   D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1 + \dfrac{-1}{1+x^2}$

   b) On sait qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x\text{Arctan}(x)$ est donnée par la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t\text{Arctan}(t)dt$.
   Calculons cette intégrale. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
   On définit, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \text{Arctan}(t)$ et $v(t) = \dfrac{t^2}{2}$. Alors les fonction u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$: $u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $v'(t) = t$.
   Par intégration par parties, on a alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^x t\text{Arctan}(t)dt &= \int_0^x u(t)v'(t)dt \\
&= [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t)dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2}\text{Arctan}(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{2(1+t^2)}dt \\
&= \frac{x^2}{2}\text{Arctan}(x) - 0 - \frac{1}{2}\int_0^x \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt \qquad \text{selon la question précédente} \\
&= \frac{x^2}{2}\text{Arctan}(x) - \frac{1}{2}(x-0) + \frac{1}{2}\left[\text{Arctan}(t)\right]_0^x \\
&= \frac{x^2}{2}\text{Arctan}(x) - \frac{x}{2} + \frac{\text{Arctan}(x)}{2} - 0 \qquad \text{puisque Arctan}(0) = 0
\end{aligned}$$

   Ainsi, une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x$Arctan(x) est la fonction :
   $\boxed{x \mapsto \dfrac{x^2\text{Arctan}(x) - x + \text{Arctan}(x)}{2}}$

Exercice 2.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 8$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{-2u_n + 5}{3}$

1.
```python
def suite_u(n):
    if n == 0:
        return 8
    else:
        return (-2 * suite_u(n) + 5)/3
```

2. (u_n) est une suite arithmético-géométrique, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = \dfrac{-2}{3}u_n + \dfrac{5}{3}$.

   On résout l'équation $l = \dfrac{-2l+5}{3}$ d'inconnue $l \in \mathbb{R}$. Pour tout $l \in \mathbb{R}$, on a :
   $l = \dfrac{-2l+5}{3} \iff 3l = -2l + 5 \iff 5l = 5 \iff \boxed{l = 1}$.
   Posons alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - l = u_n - 1$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - l = \dfrac{-2u_n+5}{3} - \dfrac{-2l+5}{3} = \dfrac{-2}{3}(u_n - l) = -\dfrac{2}{3}v_n$.

   La suite (v_n) est donc **géométrique** de raison $q = -\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 7$.

   Ainsi, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 7 \times \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$.

   Enfin, on a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 1 = 7 \times \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n + 1}$.

3. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\dfrac{2}{3} \in]-1, 1[$, donc elle converge vers 0.

   Ainsi, par somme, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 1}$.

4.
```python
n = 0
while abs(suite_u(n) - 1) >= 10**(-6):
    n += 1
print(n)
```

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \left(7 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^k + 1\right) = 7\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} 1$

   On a la somme de termes d'une suite géométrique et une somme constante, donc on obtient :
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = 7 \times \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^0 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} + (n+1)$.

   Finalement : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = n + 1 + 7 \times \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{5}{3}} = \boxed{n + 1 + \frac{21}{5}\left(1 - \left(-\frac{2}{5}\right)\right)^{n+1}}$.

Exercice 3.

On souhaite étudier l'inversibilité et les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1. On a $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 11 & -5 \\ -5 & -5 & 11 \end{pmatrix}$.

   Or $\alpha A + \beta I_3 = \begin{pmatrix} 3\alpha+\beta & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 3\alpha+\beta & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 3\alpha+\beta \end{pmatrix}$

   En identifiant les coefficients dans deux matrices, on cherche donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ qui vérifient $-\alpha = -5$, donc $\alpha = 5$, et $3\alpha + \beta = 11$, donc $\beta = 11 - 3\alpha = 11 - 15 = -4$
   Finalement : $\boxed{A^2 = 5A - 4I_3}$.

2. On a $-\dfrac{1}{4}(A^2 - 5A) = I_3$, donc $A\left(-\frac{1}{4}(A - 5I_3)\right) = I_3$.

   Ainsi, la matrice A est bien inversible, avec pour inverse $\boxed{A^{-1} = -\dfrac{1}{4}(A - 5I_3)}$.

   On a donc : $A^{-1} = -\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la propriété : "il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$". Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - *Initialisation* ($n = 0$). $A^0 = I_3 = 0A + 1I_3$, donc $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ conviennent. La propriété P_0 est bien vraie.
   - *Hérédité*. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété P_n est vraie. On dispose donc de $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$. Alors :
     $A^{n+1} = A^n \times A = (a_n A + b_n I_3)A = a_n A^2 + b_n A$
     Comme $A^2 = 5A - 4I_3$, on a : $A^{n+1} = a_n(5A - 4I_3) + b_n A = (5a_n + b_n)A - 4a_n I_3$.
     Ainsi, les réels $a_{n+1} = 5a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$ conviennent, et P_{n+1} est bien vraie.

   - Par principe de récurrence, on a bien l'existence de réels a_n, b_n qui conviennent pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On note (a_n) et (b_n) les suites obtenues à la question précédente, qui sont donc définies par récurrence de la manière suivante : $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + b_n \\ b_{n+1} = -4a_n \end{cases}$$

   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\boxed{a_{n+2} = 5a_{n+1} + b_{n+1} = 5a_{n+1} - 4a_n}$.
   On a bien une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 pour la suite (a_n).

   b) On pose l'équation caractéristique (E_c) : $x^2 - 5x + 4 = 0$.
   Son discriminant est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 4 = 25 - 16 = 9 > 0$.
   L'équation caractéristique admet donc deux solutions réelles distinctes, données par $q_1 = \dfrac{5-3}{2} = 1$ et $q_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4$.
   Ainsi, il existe, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \lambda 1^n + \mu 4^n = \underline{\lambda + \mu 4^n}$.
   Or on sait que $a_0 = 0$ et que $a_1 = 5a_0 + b_0 = 1$.
   Donc $\lambda + \mu = a_0 = 0$ et $\lambda + 4\mu = a_1 = 1$.

Or : $\begin{cases} \lambda+\mu &= 0 \\ \lambda+4\mu &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda+\mu &= 0 \\ 3\mu &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu &= \dfrac{1}{3} \\ \lambda &= -\dfrac{1}{3} \end{cases}$ D'où finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \dfrac{4^n-1}{3}}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{b_n = -4a_{n-1} = \dfrac{4-4^n}{3}}$. Cette expression est encore vraie pour $b_0 = 1$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{4^n-1}{3} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{4-4^n}{3}$$

c) On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$A^n = a_nA + b_nI_3 = \dfrac{4^n-1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \dfrac{4-4^n}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Or $\dfrac{4^n-1}{3} \times 3 + \dfrac{4-4^n}{3} = \dfrac{2\times 4^n+1}{3}$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{2\times 4^n+1}{3} & -\dfrac{4^n-1}{3} & -\dfrac{4^n-1}{3} \\ -\dfrac{4^n-1}{3} & \dfrac{2\times 4^n+1}{3} & -\dfrac{4^n-1}{3} \\ -\dfrac{4^n-1}{3} & -\dfrac{4^n-1}{3} & \dfrac{2\times 4^n+1}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

On rappelle qu'on dénombre les combinaisons possibles pour un coffre fort. La combinaison est une suite de 3 à 8 entiers, tous compris entre 0 et 99, à rentrer dans l'ordre.
On note $k \in [\![3, 8]\!]$ la longueur de la combinaison.

1. Si on sait que la combinaison est constituée de 4 nombres, le choix d'une combinaison est un choix *avec ordre et avec répétition* possible de 4 nombres parmi les 100 entiers de 0 à 99.
   Le nombre de possibilités est donc égal à $\boxed{100^4 = 10^8}$, soit cent millions.
2. Si on ne connaît pas k, on doit sommer le nombre de combinaisons possibles pour chaque valeur de k, donc on obtient :
   $$\sum_{k=3}^{8} 100^k = \frac{100^3 - 100^9}{1 - 100} = \frac{10^{18} - 10^6}{99}$$
3. Si on sait que $k = 3$ et que les 3 nombres sont tous différents, on doit effectuer un choix *avec ordre* et **sans répétition** de 3 éléments parmi 100. On a donc $\boxed{100 \times 99 \times 98}$ possibilités dans le ces.
4. Si on sait que $k = 4$ et que la suite de nombre est strictement croissante, on doit effectuer un choix **sans ordre et sans répétition** (puisque le caractère strictement croissant impose l'ordre).
   Ainsi, on obtient $\boxed{\binom{100}{4}} = \dfrac{100 \times 99 \times 98 \times 97}{24}$ possibilités dans le cas.
5. Élisa sait que Naël a choisi une combinaison à 5 nombres ($k = 5$), et elle connaît aussi ses nombres préférés.
   a) On dénombre plutôt le **complémentaire**.
   On sait qu'il y a 99^5 combinaisons qui ne contiennent pas le nombre 77, et 100^5 combinaisons au total.
   Ainsi, le nombre de combinaisons possibles qui contiennent au moins 1 fois le nombre 77 vaut $\boxed{100^5 - 99^5}$.
   b) Il s'agit seulement de choisir l'**ordre** des 5 nombres, c'est à dire une *permutation* des 5 éléments.
   On a donc $\boxed{5! = 120}$ possibilités dans ce cas.
6. **Python** On représente une combinaison en Python par une liste d'entiers.

a)

```python
def vérifie(L):
    if len(L) < 3 or len(L) > 8:
        return False
    for k in L:
        if k < 0 or k > 99:
            return False
    return True
```

b)

```python
def strict_croissante(Comb):
    n = len(Comb)
    for i in range(n-1):
        if Comb[i] >= Comb[i+1]:
            return False
    return True
```

c)

```python
def nombre_de_sept(Comb):
    nb7 = 0
    for k in Comb:
        if k % 10 == 7:   # unité
            nb7 += 1
        if k // 10 == 7: # dizaine
            nb7 += 1
    return nb7
```

Ou encore :

```python
def nombre_de_sept_bis(Comb):
    nb7 = 0
    for k in Comb:
        for carac in str(k):
            if carac == "7":
                nb7 += 1
    return nb7
```

Exercice 5. Puissances de matrices par « trigonalisation »

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -5 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$.

On utilise le Pivot de Gauss pour échelonner cette matrice.

- En faisant $L_2 \leftrightarrow L_3$, on obtient $\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -2-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & 0 \end{pmatrix}$
- Avec la transvection $L_3 \leftarrow L_3 - (2+\lambda)L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -2-\lambda \\ 0 & 0 & (2+\lambda)^2 \end{pmatrix}$

Ainsi, lorsque $\lambda \neq 3$ et $\lambda \neq -2$, on a obtenu une matrice échelonnée de rang 3.

Lorsque $\lambda = -2$, on a obtenu la matrice $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est échelonnée de rang 2.

Enfin, pour $\lambda = 3$, on a obtenu la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$, qui a le même rang que sa transposée $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -5 & -5 & 25 \end{pmatrix}$ et donc que $\begin{pmatrix} -5 & -5 & 25 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en permutant les lignes.

On obtient donc un rang de 2 dans ce cas.

Finalement :

$$\boxed{\operatorname{rg}(M - \lambda I_3) = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda = -2 \text{ ou } \lambda = 3 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}}$$

b)
- Si $\lambda \notin \{3, -2\}$, la matrice $(M - \lambda I_3)$ est inversible, donc l'équation matricielle admet une unique solution : $X = 0$.
- Si $\lambda = -2$, on obtient le système linéaire $(S_{-2}) \begin{cases} 5x - y - 5z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -y &= 0 \end{cases}$, qui est de rang 2 avec z comme inconnue secondaire.

  Ainsi, on a $(S_{-2}) \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$. L'ensemble des solutions de (S_{-2}) est $\{(z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, donc les solutions de l'équation sont les matrices $\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, pour $z \in \mathbb{R}$.
- Si $\lambda = 3$, on obtient le système linéaire $(S_3) \begin{cases} -y - 5z &= 0 \\ -5y &= 0 \\ -y - 5z &= 0 \end{cases}$, qui est équivalent

à $\begin{cases} -5z-y &= 0 \\ -5y &= 0 \end{cases}$. On a un système de rang 2 avec x comme inconnue secondaire. L'ensemble des solutions de (S_3) est $\{(x,0,0) \mid z \in \mathbb{R}\}$, donc les solutions de l'équation sont les matrices $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

2. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On applique le pivot de Gauss étendu à P et I_3 simultanément.
   - $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

     On a une matrice échelonnée de rang 3, donc P est bien inversible.
   - $L_2 \leftarrow -L_2$ et $L_3 \leftarrow -L_3$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
   - $L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   Ainsi : $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

3. On a $MP = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, et donc $T = P^{-1}MP = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$.

   T est une matrice **triangulaire supérieure**.
4. On a $P^{-1}MP = T$, donc $P(P^{-1}MP)P^{-1} = PTP^{-1}$, et ainsi $M = PTP^{-1}$.
   Comme T est une matrice triangulaire qui n'a pas de 0 sur la diagonale, elle est inversible. Ainsi, M est le **produit de 3 matrices inversibles** : elle est elle-même inversible.
5. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proprété H_n : "$M^n = PT^nP^{-1}$".
   - *Initialisation* $(n = 0)$: $M^0 = I_3$ et $PT^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = P_3$. Ainsi, H_0 est bien vraie.
   - *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $M^n = PT^nP^{-1}$. Alors :
     $M^{n+1} = M^nM = (PT^nP^{-1})(PTP^{-1}) = PT^n(P^{-1}P)TP^{-1} = PT^nTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$.
     Ainsi, H_{n+1} est encore vraie. D'où l'hérédité.
   - En conclusion, par principe de récurrence, on sait que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : M^n = PT^nP^{-1}}$.
6. **Calcul des puissances de T.** On pose $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) On a immédiatement que $T = D + N$. De plus, $DN = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et on obtient le même résultat pour ND. D'où : $\boxed{DN = ND}$.

b) $\boxed{N^2 = 0_3}$ par produit matriciel.

c) Comme les matrices D et N *commutent*, on peut appliquer la formule du **binôme de Newton**. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$.
Or pour tout $k \geq 2$, on a $N^k = N^2 N^{k-2} = 0 \times N^{k-2} = 0$. Ainsi, pour $n \geq 1$, il ne reste que les termes pour $k = 0$ et $k = 1$, et on obtient :
$T^n = \binom{n}{0} D^{n-0} N^0 + \binom{n}{1} D^{n-1} N^1 = D^n I_3 + nD^{n-1}N = \boxed{D^n + nND^{n-1}}$ (puisque D et N commutent). C'est bien le résultat voulu.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme D est une matrice diagonale, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$\underline{D^k = \mathrm{diag}((-2)^k, (-2)^k, 3^k)}$.
Ainsi, $ND^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et donc $\boxed{T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}}$.
Et cette forme est encore valide pour $n = 0$, puisque $M^0 = I_3$.
Enfin, il reste à calculer $M^n = PT^nP^{-1}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
On a $PT^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & (n-2)(-2)^{n-1} & 3^n \\ 0 & -(-2)^n & 0 \\ (-2)^n & (n-2)(-2)^{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.
Donc $M^n = PT^nP^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 3^n & -n(-2)^{n-1} & (-2)^n - 3^n \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & -n(-2)^{n-1} & (-2)^n \end{pmatrix}}$.

7. On définit trois suites $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par récurrence, en posant : $x_0 = y_0 = z_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n - y_n - 5z_n \\ y_{n+1} &= -2y_n \\ z_{n+1} &= -y_n - 2z_n \end{cases}$$

a) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété Q_n : « $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ».

- *Initialisation* ($n = 0$). On sait que $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et que $M^0 = I_3$.
  Ainsi, l'égalité est bien vraie au rang $n = 0$.
- *Hérédité*. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété Q_n soit vraie.
  Alors : $M^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = M \times M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_n - y_n - 5z_n \\ -2y_n \\ -y_n - 2z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$.
  Donc la propriété Q_n est encore vraie.
- *Conclusion*. Par principe de récurrence, on a bien montré que la propriété Q_n est $\boxed{\text{vraie pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

b) On en déduit par produit matriciel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n - n(-2)^{n-1} + (-2)^n - 3^n \\ (-2)^n \\ -n(-2)^{n-1} + (-2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(n+2)(-2)^{n-1} \\ (-2)^n \\ -(n+2)(-2)^{n-1} \end{pmatrix}$$
Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_n = -(n+2)(-2)^{n-1}}$.