DS 5 – Maths & Info

La calculatrice est interdite.
On pourra admettre une question (en le précisant) pour poursuivre la résolution des exercices.
La qualité de la ***rédaction****, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'évaluation,* ***ainsi que le soin.***

Exercice 1.

1. Calculer les intégrales suivantes :

   a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(2x+1)^3}dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-t}}dt$, en posant $u = e^t$

2. a) Déterminer deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{x^2}{1+x^2} = a + \dfrac{b}{1+x^2}$

   b) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x\text{Arctan}(x)$.

Exercice 2.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 8$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{-2u_n + 5}{3}$

1. Écrire une fonction *récursive* `suite_u(n)` en Python, qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n.
2. Donner la nature de la suite (u_n), puis déterminer soigneusement son terme général.
3. La suite (u_n) converge-t-elle ? Justifier.
4. Écrire un script Python qui *affiche* le premier rang $n \in \mathbb{N}$ pour lequel u_n est proche de 1 à moins de 10^{-6}.
5. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.

On souhaite étudier l'inversibilité et déterminer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = a_nA + b_nI_3$.
4. On note (a_n) et (b_n) les suites obtenues à la question précédente, qui sont donc définies par récurrence de la manière suivante : $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

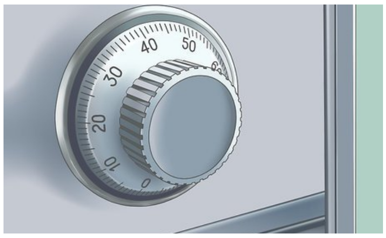
$$\begin{cases} a_{n+1} &= 5a_n + b_n \\ b_{n+1} &= -4a_n \end{cases}$$

   a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.

   b) Déterminer l'expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, et en déduire celle de b_n.

   c) Conclure quand à l'objectif de l'exercice.

Exercice 4.



Élisa voudrait voler le contenu du coffre fort de Naël, mais elle ne connaît pas la combinaison qu'il a choisie. Elle s'est cependant procuré le manuel du coffre, qui indique que la combinaison est nécessairement une suite de 3 à 8 entiers, tous compris entre 0 et 99, à rentrer dans l'ordre.

On note k la taille de la combinaison du coffre : on a donc $k \in [\![3, 8]\!]$.
Les questions sont indépendantes. À chaque fois, on demande de justifier mais pas de faire les applications numériques, sauf mention explicite du contraire.

1. Combien de combinaisons sont possibles pour le coffre fort si on sait qu'elle est constituée de 4 nombres ?
2. Combien de combinaisons sont possibles en tout si on ne connaît pas k ?
3. Combien de combinaisons sont possibles si on sait que $k = 3$ et que les 3 nombres sont tous différents ?
4. Combien de combinaisons sont possibles si on sait que $k = 4$ et que la suite de nombre est strictement croissante ?
5. Élisa sait que Naël a choisi une combinaison à 5 nombres ($k = 5$), et elle connaît aussi ses nombres préférés.
   a) Combien de combinaisons possibles contiennent au moins 1 fois le nombre 77 ?
   b) Combien de combinaisons contiennent exactement une fois chacun des nombres 1, 7, 17, 77 et 99 ? On donnera la valeur numérique.

6. **Python.** On représente une combinaison en Python par une liste d'entiers.
   a) Écrire une fonction `vérifie(L)` qui prend en entrée une liste d'entiers L, et qui renvoie `True` si la liste correspond à une combinaison valide selon le manuel du coffre, et `False` sinon.
   b) Écrire une fonction `strict_croissante(Comb)` qui prend en argument une liste Comb représentant une combinaison, et qui vérifie si elle est strictement croissante.
   c) Écrire une fonction `nombre_de_sept(Comb)` qui prend en paramètre une liste `Comb` représentant une combinaison, et qui renvoie le nombre de 7 contenus dans la combinaison. Par exemple, `nombre_de_sept([71, 21, 77, 15, 7])` devra renvoyer `4`.

Exercice 5. Puissances de matrices par "trigonalisation"

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

1. a) Déterminer en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ le rang de la matrice $M - \lambda I_3$.
   b) Résoudre selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'équation matricielle $(M - \lambda I_3)X = 0$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
3. Calculer $T = P^{-1}MP$. Quelle est la nature de cette matrice ?
4. Exprimer M en fonction de T et P. Que peut-on en déduire sur l'inversibilité de M ?
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $M^n = PT^nP^{-1}$.
6. **Calcul des puissances de T.** On pose $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Vérifier que $T = D + N$ et que $DN = ND$.
   b) Calculer N^2. Que peut-on en déduire pour les puissances de la matrice N ?
   c) À l'aide de la formule du binôme, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $T^n = D^n + nND^{n-1}$.
   d) En déduire l'expression explicite de la matrice T^n puis celle de M^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
7. On définit trois suites $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par récurrence, en posant : $x_0 = y_0 = z_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} x_{n+1} & = & 3x_n - y_n - 5z_n \\ y_{n+1} & = & -2y_n \\ z_{n+1} & = & -y_n - 2z_n \end{cases}$$
   a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   b) En déduire l'expression de x_n en fonction de n.