

DS 6 – Maths & Info

La qualité de la **rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements sont pris en compte dans l'évaluation, ainsi que le soin.

Exercice 1. Équations différentielles.

1. Résoudre soigneusement sur $]0, +\infty[$ le problème de Cauchy suivant :
$$\begin{cases} ty' - 2y = \frac{t^3}{(t+1)^2} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : 2y'' - 2y' + \frac{y}{2} = 9e^{-x}$.
On cherchera une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Équivalents

1. Rappeler la définition de deux suites équivalentes.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle qui vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}^* : \ln(n+1) \leq u_n \leq \ln(n) + 1$.
Donner un équivalent simple de u_n .
3. Pour chaque suite, déterminer un équivalent simple et en déduire la convergence de la suite :

a) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{3n^2-1}$

b) $v_n = \frac{\sqrt{\cos(\frac{1}{n})} - 1}{(n+1)(1 - e^{\frac{1}{n}})}$

Exercice 3. Suites adjacentes.

On définit trois suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et $w_0 = 2$, et pour tout

$$n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n + w_n}{4} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n + 2w_n}{4} \\ w_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n + 3w_n}{6} \end{cases}$$

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie la liste qui contient les trois valeurs $[u_n, v_n, w_n]$
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n < w_n$.
Indication : On exprimera $v_{n+1} - u_{n+1}$ et $w_{n+1} - v_{n+1}$.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
4. Justifier soigneusement que les **trois** suites convergent vers une limite commune $l \in \mathbb{R}$.
5. Écrire un programme Python qui donne une valeur approchée de la limite à 10^{-4} près.

Seulement si vous avez le temps :

6. Déterminer trois réels non nuls a, b, c tels que la suite $(au_n + bv_n + cw_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
7. En déduire que $l = \frac{58}{47}$.

Exercice 4. Géométrie.

On considère la droite $\mathcal{D}$ de l'espace de représentation paramétrique $\mathcal{D} : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Pour tout ce problème, on **fixe** un point $A(a, b, c)$ de l'espace, et on cherche à déterminer les coordonnées de $H(\alpha, \beta, \gamma)$, son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$.

Partie I : équations de plans

1. Déterminer un point F et un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$.
2. a) Déterminer une représentation paramétrique puis une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ contenant les points $B(-1, 0, 0)$, $C(2, 7, -3)$ et $D(-2, 4, 1)$.
b) Montrer que tous les points de la droite $\mathcal{D}$ vérifient l'équation obtenue. Que peut-on en déduire ?
3. Montrer que le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $-2x + y - 7 = 0$ contient également $\mathcal{D}$.
4. Justifier que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles. En déduire une représentation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$.
5. Soit $\mathcal{P}_3$ le plan perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par A . Donner un vecteur normal à $\mathcal{P}_3$ et en déduire une équation cartésienne de $\mathcal{P}_3$. On vérifiera que cette équation se met sous la forme : $x + 2y - z - a - 2b + c = 0$

Partir II : projeté orthogonal

6. Rappeler la définition du projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$, et justifier que H est l'unique point d'intersection de $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$.
7. En déduire que les coordonnées de H vérifient un système linéaire qu'on peut écrire sous la forme :

$$M_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = M_2$$

où $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $M_2 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est une matrice colonne à déterminer (qui dépend de a, b, c).

8. Montrer que M_1 est inversible et calculer son inverse.
9. En déduire les coordonnées de H en fonction de celles de A .
10. Déterminer (en fonction de a, b, c) la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ dans la représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ pour que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit orthogonal au vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
11. Retrouver les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{D}$.

Exercice 5. Matrices symétriques et antisymétriques.

Dans cet exercice, on représente les matrices en Python comme des **listes de listes**.

1. Donner des instructions simples en Python pour obtenir le nombre de lignes et le nombre de colonnes d'une matrice M représentée comme une liste de listes.
2. Écrire une fonction Python `est_symétrique(M)` qui prend en entrée une liste de liste représentant une matrice M , et qui renvoie un booléen qui indique si M est symétrique ou non. On affichera une erreur dans le cas où la matrice n'est pas carrée.
3. Écrire une fonction `matrice_nulle(n,p)` prend en paramètre deux entiers $n, p \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie une liste de liste représentant la matrice $0_{n,p}$. On pourra procéder par compréhension.
4. Rappeler la définition d'une matrice antisymétrique. Que peut-on dire de ses coefficients diagonaux ? Justifier.
5. On rappelle que la fonction `randint(a,b)` du module `random` renvoie un entier aléatoire de l'intervalle $\llbracket a, b \rrbracket$ (bornes incluses).

Écrire une fonction `antisym_aléa(n, a, b)` qui prend en paramètre une taille $n \in \mathbb{N}^*$ et deux bornes $a, b \in \mathbb{Z}$, et qui renvoie une liste de listes représentant une matrice **antisymétrique** d'ordre n , à coefficients choisis aléatoirement dans $\llbracket a, b \rrbracket$.

On pourra partir de la matrice nulle $0_{n,n}$.

6. À faire en DM : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M + M^\top$ est symétrique et que $M - M^\top$ est antisymétrique.
- b) Montrer que la seule matrice à la fois symétrique et antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice nulle.
- c) Dédurre des deux questions précédentes que pour tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un couple $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $M = S + A$, et qu'un tel couple est unique.
Indication : Pour l'unicité, on montrera que si $S + A = S' + A'$ conviennent, alors nécessairement $S = S'$ et $A = A'$.
- d) Écrire une fonction Python `décompositionSA(M)` qui prend en argument une matrice M (toujours représentée par une liste de listes), et qui renvoie le couple (S, A) de la décomposition précédente.