

DS 7 – Maths & Info

Partie Maths – 2 heures

Les exercices sont indépendants et peuvent être réalisés dans l'ordre de votre choix, en numérotant clairement les questions. On pourra toujours admettre une question (en le précisant) pour poursuivre la résolution.

Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement et justifiez les choix que vous êtes amenés à faire.

La qualité de la **rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements sont pris en compte dans l'évaluation, ainsi que le soin.

Exercice 1.

On considère f définie sur $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = x + \frac{\ln(\cos(x))}{\tan(x)}$.

1. Prolongement(s).

a) Déterminer un équivalent en 0 en $\ln(\cos(x))$. *Indication : on écrira $\cos(x) = 1 + \cos(x) - 1$. On pourra utiliser cet équivalent sans justifier dans la suite de l'exercice.*

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

c) Montrer que pour tout $h \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $f\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \frac{\pi}{2} - h + \frac{\sin(h) \ln(\sin(h))}{\cos(h)}$.

d) Rappeler la valeur de $\lim_{y \rightarrow 0} y \ln(y)$.

e) Dédire des questions précédentes que f admet un prolongement par continuité \tilde{f} sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, que l'on explicitera.

2. Justifier la dérivabilité de f , et vérifier que : $\forall x \in I, f'(x) = -\frac{\ln(\cos(x))}{\sin^2(x)}$.

3. Réciproque.

a) Montrer que f réalise une bijection de $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Dresser en justifiant le tableau de variations de la fonction f^{-1} .

c) f^{-1} admet-elle un prolongement par continuité ? Si oui, l'expliciter.

4. Dérivabilité.

a) Rappeler la définition de la dérivabilité d'une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ en $x_0 \in I$.

b) Montrer que \tilde{f} est dérivable en 0 et donner le nombre dérivé associé.

c) **Bonus** : Étudier la dérivabilité de \tilde{f} en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. On considère le polynôme $P = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$.

1. Donner sans calcul la multiplicité de 0 en tant que racine de P .

2. Montrer que 2 est racine multiple de P .

On admettra que son ordre de multiplicité est exactement 2.

3. Factoriser au maximum le polynôme P .

4. Quelles sont les racines de P ? Est-il scindé ?

Exercice 3.

L'objectif de l'exercice est de déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifient la relation :

$$(\mathcal{R}) : P(X+1) - P(X-1) = X^2 + 1$$

1. Justifier que si $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie (\mathcal{R}) , alors P ne peut pas être de degré inférieur ou égal à 1.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $n = \deg(P) \geq 2$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.
 - a) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ tel que :

$$P(X+1) - P(X-1) = a_n ((X+1)^n - (X-1)^n) + a_{n-1} ((X+1)^{n-1} - (X-1)^{n-1}) + Q$$

- b) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. En développant à l'aide du binôme de Newton, déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $(X+1)^q - (X-1)^q$.
 - c) En déduire le degré et le coefficient dominant du polynôme $P(X+1) - P(X-1)$.
 - d) Justifier que si P vérifie l'égalité (\mathcal{R}) , alors $\deg(P) = 3$.
3. Déterminer l'ensemble des polynômes réels qui vérifient (\mathcal{R}) .

Exercice 4.

Pour tout réel $t > 0$, on définit le polynôme $P_t = X^5 + tX - 1 \in \mathbb{R}_5[X]$.

Le but de l'exercice est d'étudier les racines du polynôme P_t en fonction de $t > 0$.

1. On fixe $t > 0$.
 - a) Montrer que le polynôme P_t admet une unique racine dans \mathbb{R} . On note $f(t)$ cette racine.
 - b) Montrer que $f(t) \in]0, 1[$.

On a donc une fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* , qui vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0 \quad (E_t)$$

2. Soient $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $0 < s < t$.
 - a) À l'aide de (E_t) , vérifier que $P_s(f(t)) = (s-t)f(t)$.
 - b) En déduire que $P_s(f(t)) < P_s(f(s))$.
 - c) Déduire de la question précédente que la fonction f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .
3. En déduire que f admet des limites finies en 0^+ et en $+\infty$.
4.
 - a) On note $l = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \in \mathbb{R}$. À partir de (E_t) , déterminer une équation vérifiée par l .
 - b) En déduire la valeur de l .
 - c) On note $l' = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \in \mathbb{R}$. Montrer par l'absurde que $l' = 0$.
 - d) En déduire que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$.

La fin de l'exercice est à faire à la maison

5. À l'aide des questions précédentes, dresser le tableau de variation de f , et montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur un intervalle que l'on précisera.
6.
 - a) Justifier que la bijection réciproque de f est la fonction $g : \begin{cases}]0, 1[& \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto \frac{1-x^5}{x} \end{cases}$
 - b) En déduire que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , et exprimer f' en fonction de f .
7. Montrer par récurrence que la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .