DS 8 – Maths & Info

Corrigé

Exercice 1. Étude d'une fonction et suite récurrente

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

1. Pour tout $x > 0$, on a $1 + \frac{1}{x} > 1$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ a bien un sens. Ainsi, f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Comme de plus toutes les fonctions usuelles mises en jeu sont dérivables sur leur domaine de définition, par opérations et composition, il en va de même pour f.
   Ainsi : $\boxed{f \text{ est bien définie et continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$

2. a) Soit $x > 0$. On a : $-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = -\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \ln(x) - \ln(x+1) = \ln(x)\left(1 - \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)$.
   Or par opérations, $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   Ainsi : $\boxed{-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{0}{\sim} \ln(x) \times 1 = \ln(x).}$

   b) On sait que $-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{0}{\sim} x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée.
   D'où, par somme : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2 - 0 = 2 \in \mathbb{R}$.
   f admet une limite finie en 0, donc $\boxed{\text{elle se prolonge par continuité en 0, en posant } f(0) = 2.}$

3. Soit $x > 0$. On a : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{2 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 2}{x} = -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{0}{\sim} \ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$.
   Les taux d'accroissements en 0 admettent une limite quand x tend vers 0, mais cette limite est infinie. $\boxed{f \text{ n'est donc pas dérivable en 0.}}$
   Par contre, sa courbe représentative admet une tangente verticale d'équation $x = 0$ en 0.

4. Comme $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on sait que $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
   D'où $-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{x}{x} = -1$.
   Par somme sur les limites, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 - 1 = 1.}$

5. a) Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors : $\exists c \in]a,b[, f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

   b) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction $g : x \in [t, t+1] \mapsto \ln(x)$.
   On sait que la fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc g vérifie bien les hypothèses du théorème des accroissements finis.
   De plus, pour tout $x \in]t, t+1 >$, on sait que $g'(x) = \dfrac{1}{x}$, et comme $t < x < t+1$, on obtient : $\dfrac{1}{t+1} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{t}$.
   Finalement, d'après le théorème des accroissements finis, on dispose de $c \in]t, t+1[$ tel que $\dfrac{g(t+1) - g(t)}{t + 1 - t} = \dfrac{\ln(t+1) - \ln(t)}{1} = g'(c)$.
   Ainsi, d'après l'encadrement obtenu ci-dessus : $\boxed{\frac{1}{t+1} < \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t}.}$

c) On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x \times (-\frac{1}{x^2}) \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = -\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + \dfrac{1}{x+1} = \ln(x) - \ln(x+1) + \dfrac{1}{x+1}$.
Ainsi, d'après l'encadrement obtenu à la question précédente :
$\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} < f'(x) < \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+1} = 0$.
Comme $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-(x+1)}{x(x+1)} = -\dfrac{1}{x(x+1)}$, on obtient bien :

$$-\frac{1}{x(x+1)} < f'(x) < 0$$

6. On souhaite montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+^=$ qui vérifie $f(x) - x = 0$. On étudie donc la fonction $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto f(x) - x$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme, et sa dérivée vaut $g' = f' - 1$. Comme f' est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après la question précédente), on en déduit que g aussi.
g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Enfin, d'après les limites obtenues pour f, on a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
On peut alors appliquer le **théorème de la bijection continue** à la fonction g, continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, et obtenir que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]-\infty, 2[$. Ainsi, 0 admet bien un unique antécédent par g. D'où :
$\boxed{\text{L'équation } f(x) = x \text{ admet bien une unique solution dans } \mathbb{R}_+^*.}$

7. On calcule $g(1)$ et $g(2)$. $g(1) = f(1) - 1 = 2 - \ln(2) - 1 = 1 - \ln(2) > 0$ puisque $2 < e$ donc $\ln(2) < 1$.
$g(2) = f(2) - 2 = 2 - 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2 = -2\ln\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ puisque $\frac{3}{2} > 1$ donc $\ln\left(\frac{3}{2}\right) > 0$.
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $c \in]1,2[$ tel que $g(c) = 0$.
On a nécessairement $c = \alpha$ d'après la question précédente (unicité de la solution), et donc $\boxed{\alpha \in]1, 2[.}$
On pouvait aussi appliquer la stricte décroissance de g et g^{-1} pour obtenir que $1 < \alpha < 2$.

8.
```python
from math import log
def f(x):
    if x <= 0:
        print("x doit être strictement positif")
        return None
    return 2 - x * log(1 + 1/x)

def g(x):
    return f(x)-x

a,b = 1,2
while b - a > 10**(-6):
    m = (a + b) / 2
    if g(a) * g(m) < 0:
        b = m
    else:
        a = m
print("une valeur approchée du point fixe alpha est :", m)
```

À chaque itération, la taille de l'intervalle $[a, b]$ est divisée par 2. On doit la diviser par $10^6 \approx 2^{20}$, donc il faut environ 20 étapes à l'algorithme pour renvoyer la valeur approchée cherchée.

Exercice 2. Probabilités

Louis essaye d'arrêter de fumer. Au jour 1, il réussit à ne pas fumer. On sait que si Louis ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il fume le lendemain est de $0,3$. Par contre, s'il succombe au jour n, il s'en veut, et la probabilité qu'il fume à nouveau le lendemain est seulement de $0,1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité qu'il fume le jour n.

1. On cherche à calculer la probabilité $\mathbb{P}_{F_3}(F_2) = \dfrac{\mathbb{P}(F_2 \cap F_3)}{\mathbb{P}(F_3)}$.
   Or on sait que $\mathbb{P}(F_2) = 0,3$ et $\mathbb{P}(\overline{F_2}) = 0,7)$, puisque Louis ne fume pas le premier jour.
   Ainsi, $\mathbb{P}(F_2 \cap F_3) = \mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}_{F_3}(F_2) = 0,3 \times 0,1 = 0,03$.
   De plus, d'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(F_3) = \mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}_{F_2}(F_3) + \mathbb{P}(\overline{F_2})\mathbb{P}_{\overline{F_2}}(F_3) = 0,3 \times 0,1 + 0,7 \times 0,3 = 0,03 + 0,21 = 0,24$.
   Finalement, on obtient : $\mathbb{P}_{F_3}(F_2) = \dfrac{0,03}{0,24} = \dfrac{3}{24} \boxed{= \dfrac{1}{8}.}$
   $\boxed{\text{Louis a donc une chance sur 8 d'avoir fumé la veille.}}$
2. On sait que Louis ne fume pas le premier jour, donc $\boxed{p_1 = 0.}$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On exprime p_{n+1} à l'aide de la formule des probabilités totales sur le système complet d'événement $(F_n, \overline{F_n})$.
   On a donc : $p_{n+1} = \mathbb{P}(F_{n+1}) = \mathbb{P}(F_n)\mathbb{P}_{F_n}(F_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{F_n})\mathbb{P}_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) = p_n \times 0,1 + (1-p_n) \times 0,3 = 0,3 - 0,2p_n$.
   On a bien montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* p_{n+1} = 0,3 - 0,2p_n.}$
3. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est **arithmético-géométrique.**
   Pour $l \in \mathbb{R}$, on sait que $l = 0,3 - 0,2l \iff 1,2l = 0,3 \iff l = \dfrac{0,3}{1,2} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.
   On définit une suite auxiliaire $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $q_n = p_n - \frac{1}{4}$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $q_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{4} = 0,3 - 0,2p_n - \left(0,3 - 0,2 \times \frac{1}{4}\right) = -0,2\left(p_n - \frac{1}{4}\right) = -0,2q_n$.
   Ainsi, la suite (q_n) est *géométrique* de raison $-0,2$ et de premier terme $q_1 = 0 - \frac{1}{4} = -0,25$.
   D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_n = -0,25 \times (-0,2)^{n-1}$.
   Et donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = 0,25 - 0,25 \times (-0,2)^{n-1}.}$
4. Comme $|-0,2| < 1$, on sait que $(-0,2)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   D'où, par opération : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0,25 = \dfrac{1}{4}.}$
   On en déduit que sur le long terme, la probabilité que Louis fume est d'environ $\frac{1}{4}$ chaque jour. Ces conditions ne permettent donc pas à Louis d'arrêter de fumer !

Exercice 3. Espaces vectoriels

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ et les vecteurs :

$$a = (2, -1, 1, 0)\ ; \quad b = (-1, 2, -2, 1)\ ; \quad c = (-2, 2, -3, 1)\ ; \quad d = (1, 4, -2, 2)\ ; \quad e = (8, 2, 5, 1).$$

1. On peut remarquer que $-3c + 2d = (6 + 2, -6 + 8, 9 - 4, -3 + 4) = (8, 2, 5, 1) = e$.
   Ainsi, la famille (c, d, e) est liée, avec par exemple la relation $-3c + 2d - e = 0_E$.
   On peut aussi passer par la résolution d'un système, ou calculer le rang en passant par une matrice !

2. La matrice associée à la famille (a, b, c, d) (dans la base canonique) est : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
   On détermine son rang par pivot de Gauss.
   - En permutant les lignes : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
   - Avec les transvections $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
   - En permutant à nouveau : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Puis, avec $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
   - Enfin, avec $L_4 \leftarrow L_4 + L_3$: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   On a obtenu une matrice échelonnée de rang 4, donc $\boxed{\text{la famille } (a, b, c, d) \text{ est de rang 4.}}$
   Comme elle comporte 4 vecteurs, et que l'espace $E = \mathbb{R}^4$ est de dimension 4, on en déduit que la famille (a, b, c, d) est libre et génératrice : $\boxed{\text{c'est bien une base de } \mathbb{R}^4.}$

3. On a $c = 0a + 0b + 1c + 0d$ et $d = 0a + 0b + 0c + 1d$.
   Pour e, on sait que $e = -3c + 2d$, donc $e = 0a + 0b - 3c + 2d$.
   Ainsi, les coordonnées dans la base (a, b, c, d) sont : $\boxed{c : (0, 0, 1, 0); d : (0, 0, 0, 1); e(0, 0, -3, 2).}$

4. On sait que $x - z - t = 0$ et $y - 2t = 0 \iff x = t + z$ et $y = 2t$. D'où :
   $G = \{(t + z, 2t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} = \{z(1, 0, 1, 0) + t(1, 2, 0, 1) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \boxed{= \mathrm{Vect}\left((1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\right)}$
   On obtient bien que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, engendré par la famille $((1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 1))$. La famille ci-dessus est composée de deux vecteurs non colinéaires, donc elle est libre. Comme elle engendre G, c'est une **base de** G. Ainsi : $\boxed{\dim(G) = 2.}$

5. Le vecteur c vérifie les équations cartésiennes du sous-espace G, puisque $-2 - (-3) - 1 = 0$ et $(2 - 2 \times 1 = 0$.
   On a donc bien $\boxed{c \in G}$.
   Pour compléter (c) en une base de G, il suffit de trouver un vecteur de G qui ne soit pas colinéaire à c, par exemple $(1, 0, 1, 0)$.
   Alors, la famille $\boxed{(c, (1, 0, 1, 0))}$ est libre, et est de cardinal 2 dans G qui est de dimension 2. C'est donc bien une base de G.

6. $F = \mathrm{Vect}(c, d) = \{\lambda(-2, 2, -3, 1) + \mu(1, 4, -2, 2) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
   $= \{(-2\lambda + \mu, 2\lambda + 4\mu, -3\lambda - 2\mu, \lambda + 2\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

On passe de la forme paramétrique ci-dessus à une forme cartésienne. Pour $x, y, z, t, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -2\lambda + \mu = x \\ 2\lambda + 4\mu = y \\ -3\lambda - 2\mu = z \\ \lambda + 2\mu = t \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = \dfrac{x+y}{5} \\ \lambda = \dfrac{y-4x}{10} \\ -3\lambda - 2\mu = z \\ \lambda + 2\mu = t \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = \dfrac{x+y}{5} \\ \lambda = \dfrac{y-4x}{10} \\ z = \dfrac{-3y+12x+4x+4y}{10} \\ t = \dfrac{y-4x+4x+4y}{10} \end{cases}$$

On obtient : $10z = -7y + 8x$ et $10t = 5y$, c'est-à-dire : $\boxed{8x - 7y - 10z = 0 \text{ et } y - 2t = 0.}$
Ainsi :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 8x - 7y - 10z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\right\}$$

7. On sait que $d \in F \backslash G$, donc $F \cap G \neq F$. Ainsi : $\dim(F \cap G) \leq 1$.
   Comme $c \in F \cap G$ et que la famille (c) est libre, on sait que $\dim(F \cap G) \geq 1$.
   D'où finalement : $\dim(F \cap G) = 1$ et $\boxed{(c) \text{ est une base de } F \cap G.}$
   Autrement dit : $F \cap G = \text{Vect}(c)$!

Exercice 4. SQL

1. La première requête renvoie les nombre total de cas recensés dans chaque pays depuis le début de l'étude.
   La seconde renvoie la population du pays le moins peuplé de la table démographie.
2. a) Une clé primaire est un attribut dont les valeurs dans la table sont uniques. C'est donc un attribut qui permet de distinguer de manière unique chaque ligne (enregistrement) de la table.
   b) Au vu des données présentées dans la table `palu`, aucun des attributs considérés (nom, pays, annee) n'a des valeurs uniques. Ils ne peuvent donc pas servir de clé primaire.
   c) Si admet qu'une clé primaire peut être un couple d'attributs, on pourrait par exemple choisir le couple (`iso, annee`) comme clé primaire, puisqu'un enregistrement correspond aux données du paludisme dans un pays donné, une année donnée.
3. a) `SELECT nom FROM palu WHERE annee = 2010.`
   b) `SELECT * FROM palu WHERE annee = 2010 AND deces > 1000`
   c) `SELECT nom FROM palu WHERE annee = 2011 ORDER BY cas DESC LIMIT 1`
   Une autre possibilité est : `SELECT nom, max(cas) FROM palu WHERE annee = 2011.`
4. a) `SELECT annee, SUM(cas) FROM palu GROUP BY annee`
   b) `SELECT nom, AVG(cas) FROM palu GROUP BY iso`
5. a)
```
SELECT nom, cas, pop AS taux_incidence
FROM palu JOIN demographie ON palu.iso = demographie.pays
WHERE annee=2011 AND periode = 2011
```
   ou encore :
```
SELECT nom, cas, pop FROM palu JOIN demographie
ON palu.iso = demographie.pays AND palu.annee = demographie.periode
WHERE annee=2011
```
   b)
```
SELECT nom, cas*100000/pop AS taux_incidence
FROM palu JOIN demographie ON palu.iso = demographie.pays
WHERE annee=2011 AND periode = 2011
```