

# DS 8 – Maths & Info

La qualité de la **rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements sont pris en compte dans l'évaluation, ainsi que le soin.

## Exercice 1. Étude d'une fonction et suite récurrente

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = 2 - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

- Justifier que  $f$  est bien définie et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Montrer que  $-\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{0}{\sim} \ln(x)$ .
  - Montrer que  $f$  se prolonge par continuité en 0 par la valeur 2. On note encore  $f$  ce prolongement qui est donc défini sur  $\mathbb{R}_+$  avec  $f(0) = 2$ .
- La fonction  $f$  ainsi prolongée est-elle dérivable (à droite) en 0 ?
- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- Énoncer le théorème des accroissements finis.
  - Montrer que pour tout  $t > 0$ , on a :  $\frac{1}{t+1} < \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t}$ .
  - En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $-\frac{1}{x(x+1)} < f'(x) < 0$ .
- Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}_+^*$  que l'on note  $\alpha$ .
- Justifier que  $1 < \alpha < 2$ .
- Définir la fonction  $f$  en Python. On rappelle que le logarithme népérien correspond à la fonction `log` du module `math`.
  - Écrire un programme Python qui permet de calculer et d'afficher une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-6}$  près, en mettant en œuvre la méthode de dichotomie.
  - Donner une estimation du nombre d'itérations (d'étapes) de votre programme.

La fin de l'exercice est non notée, et est à finir à la maison.

On définit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 = 2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [1, 2]$ .
- À l'aide du résultat de la question 5, montrer que pour tous  $x \in [1, 2]$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .
  - En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ .
  - Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$ .
- Que peut-on en déduire pour la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

## Exercice 2. Probabilités

Louis essaye d'arrêter de fumer. Au jour 1, il réussit à ne pas fumer. On sait que si Louis ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il fume le lendemain est de 0,3. Par contre, s'il succombe au jour  $n$ , il s'en veut, et la probabilité qu'il fume à nouveau le lendemain est seulement de 0,1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $F_n$  l'événement « Louis fume le  $n$ -ième jour », et  $p_n = \mathbb{P}(F_n)$ .

- Représenter par un arbre la situation des 3 premiers jours.
- Si on sait que Louis a fume le troisième jour, quelle est la probabilité qu'il ait fumé la veille ?  
L'application numérique est demandée.
- Donner la valeur de  $p_1$ , et montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $p_{n+1} = 0,3 - 0,2p_n$ .
- Déterminer le terme général de la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
- Calculer et interpréter la valeur de la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ .

### Exercice 3. Espaces vectoriels

On considère l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^4$  et les vecteurs :

$$a = (2, -1, 1, 0) ; \quad b = (-1, 2, -2, 1) ; \quad c = (-2, 2, -3, 1) ; \quad d = (1, 4, -2, 2) ; \quad e = (8, 2, 5, 1).$$

1. La famille  $(c, d, e)$  est-elle libre ou liée? Si elle est liée, donner une relation qui lie ses vecteurs.
2. Montrer que la famille  $(a, b, c, d)$  est une base de  $E = \mathbb{R}^4$ . On pourra calculer son rang.
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs  $c, d$  et  $e$  dans la base de la question précédente.
4. Soit  $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - z - t = 0 \quad \text{et} \quad y - 2t = 0\}$ . Démontrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , en déterminer une base et donner sa dimension.
5. Démontrer que  $c \in G$ . Donner une base de  $G$  contenant le vecteur  $c$ .
6. Soit  $F = \text{Vect}(c, d)$ . Donner  $F$  sous forme cartésienne.
7. Déterminer une base de  $F \cap G$ .

### Exercice 4. SQL

Pour suivre la propagation des épidémies, de nombreuses données sont recueillies par les institutions internationales comme l'OMS. Par exemple, on suit la propagation du paludisme dans le monde à l'aide des deux tables suivantes :

- La table `palu` recense le nombre de nouveaux cas confirmés et le nombre de décès liés au paludisme; certaines lignes de cette table sont données en exemple (on précise que `iso` est un identifiant unique pour chaque pays) :

| nom     | iso | annee | cas       | deces  |
|---------|-----|-------|-----------|--------|
| Bresil  | BR  | 2009  | 309 316   | 85     |
| Bresil  | BR  | 2010  | 334 667   | 76     |
| Kenya   | KE  | 2010  | 898 531   | 26 017 |
| Mali    | ML  | 2011  | 307 035   | 2 128  |
| Ouganda | UG  | 2010  | 1 581 160 | 8 431  |
| ...     |     |       |           |        |

- la table `demographie` recense la population totale de chaque pays; certaines lignes de cette table sont données en exemple :

| pays | periode | pop         |
|------|---------|-------------|
| BR   | 2009    | 193 020 000 |
| BR   | 2010    | 194 946 000 |
| KE   | 2010    | 40 909 000  |
| ML   | 2011    | 14 417 000  |
| UG   | 2010    | 33 987 000  |
| ...  |         |             |

Toutes les questions sont indépendantes.

1. Que renvoient les deux requêtes suivantes?

a)

```
SELECT nom, SUM(cas) FROM palu
GROUP BY iso
```

b)

```
SELECT MIN(pop) IN demographie
```

2. a) Rappeler la définition de clé primaire.
- b) Au vu des données présentées dans la table `palu`, parmi les attributs `nom`, `iso` et `annee`, quels attributs peuvent servir de clé primaire ?
- c) On admet qu'une clé primaire peut être un couple d'attributs. Que pourrait-on choisir comme clé primaire pour la table `palu` ?
3. a) Écrire une requête renvoyant la liste des pays touchés en 2010.
- b) Écrire une requête en langage SQL qui récupère depuis la table `palu` toutes les données de l'année 2010 qui correspondent à des pays où le nombre de décès dus au paludisme est supérieur ou égal à 1000.
- c) Écrire une requête permettant de déterminer le pays ayant connu le plus grand nombre de nouveaux cas de paludisme en 2011 (on supposera qu'il n'y a pas de pays *ex aequo* pour les nombres de cas).
4. a) Écrire une requête renvoyant le nombre total de nouveaux cas chaque année.
- b) Écrire une requête renvoyant pour chaque pays le nombre moyen de nouveaux cas par an.
5. a) Écrire une requête en langage SQL qui récupère, pour chaque pays de la table `palu`, le nombre de cas apparus en 2011 et la population de ce pays cette année-là.
- b) Modifier la requête précédente pour qu'elle détermine le taux d'incidence (défini ci-dessous) du paludisme en 2011 pour les différents pays de la table `palu`.

On appelle *taux d'incidence d'une épidémie* le rapport du nombre de nouveaux cas pendant une période donnée sur la taille de la population-cible pendant la même période. Il s'exprime généralement en « nombre de nouveaux cas pour 100 000 personnes par année ». Il s'agit d'un des critères les plus importants pour évaluer la fréquence et la vitesse d'apparition d'une épidémie.

## Aide-mémoire SQL

### Rappel des mots clés dans l'ordre :

SELECT, FROM, JOIN ... ON ..., WHERE, GROUP BY, HAVING, ORDER BY ... (ASC/DESC), LIMIT, OFFSET.

Note : HAVING n'a de sens que s'il y a création de groupes avec GROUP BY

### Fonctions d'agrégation :

SUM( attribut ) : somme des valeurs

MIN(attribut) : plus petite valeur

MAX (attribut) : plus grande valeur

AVG(attribut) : moyenne des valeurs

COUNT (\*) : nombre de lignes