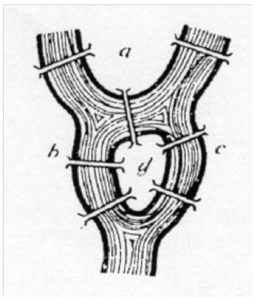
TP 21 Python – Introduction aux graphes

1. Introduction

La théorie des graphes est née en 1736 quand Euler démontra qu'il n'est pas possible de traverser chacun des 7 ponts de la ville de Königsberg une fois chacun et de revenir au point de départ.



Un graphe permet de représenter simplement la structure, les connexions, les cheminements possibles d'un ensemble complexe comprenant un grand nombre de situations, en exprimant les relations entre ses éléments : réseaux de communication, réseaux routiers, arbres généalogiques, interactions de diverses espèces animales, circuits électriques etc.

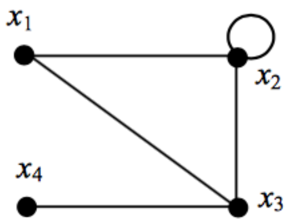
2. Graphes non orientés

Définition

Un **graphe non orienté** est un couple $G = (S, A)$ où :

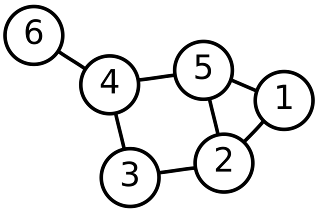
- S est un ensemble fini $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$). Les éléments de S sont appelés **sommets** ou **nœuds** du graphe.
- A est un ensemble fini de **paires** d'éléments de S (par exemple $\{x_1, x_4\}$).
  Les éléments de A sont appelées **arêtes**.

Représentation : On représente un graphe non orienté en plaçant les sommets et en les reliant par les arêtes.
Par exemple, le graphe $G = (S, A)$ avec
$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et $A = \{\{x_2\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_2, x_3\}\}$ est représenté ci-contre.



Exercice 1. Représenter le graphe non orienté $G = (S, A)$, où $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et
$A = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3\}\}$.

Exercice 2. Donner S et A pour le graphe représenté ci-dessous :



Vocabulaire

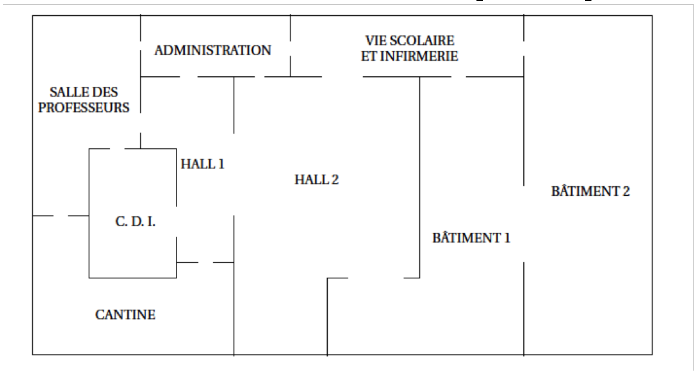
- L'**ordre d'un graphe** est le nombre de sommets de ce graphe ($\text{Card}(S)$).
- La **taille d'un graphe** est le nombre d'arêtes de graphe ($\text{Card}(A)$).
- Deux sommets reliés par une arêtes sont **adjacents** (ou **voisins**).
- Le **degré d'un sommet** s, noté $d(s)$, est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
- Un **chemin** entre deux sommets d'un graphe est une suite de sommets $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$ tels que $\{v_i, v_{i+1}\}$ est une arête du graphe pour tout $0 \leq i \leq p - 1$.
  La **longueur** d'un chemin est le nombre d'arêtes qui le composent.
- Si deux sommets sont reliés par un chemin, la **distance** entre ces deux sommets est la plus petite des longueurs des chemins entre ces deux sommets.
- Un **cycle** est un chemin composé d'arêtes **distinctes** dont le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont les mêmes ($v_0 = v_p$).
  Les arêtes doivent être distinctes mais un cycle peut passer plusieurs fois par les mêmes sommets.
- Un graphe est dit **simple** si aucun sommet n'est adjacent à lui-même (il n'y a pas de **boucle**). Dans ce cours, on étudie principalement les graphes simples.
- Un graphe est dit **complet** si deux sommets quelconques sont toujours adjacents ("toutes les arêtes existent").
- Un graphe est dit **connexe** si tous les sommets sont reliés par au moins un **chemin**.

Exercice 3. On reprend le graphe de l'exercice précédent.

1. Quel est l'ordre de ce graphe ? Sa taille ?
2. Deux sommets non adjacents sont :
3. Quels sont les voisins du sommet 3 ?
4. Quel est le degré du sommet 1 ?
5. Quelle est la distance entre les sommets 6 et 2 ?
6. Quels sont les chemins qui réalisent cette distance ?
7. Donner un autre chemin entre 6 et 2 (plus long que la distance).
8. Quelle est la longueur maximale d'un cycle de ce graphe ?
9. Combien d'arêtes, au minimum, faudrait-il supprimer pour que ce graphe n'ait plus de cycles ?
10. Combien pour qu'il ne soit plus connexe ?

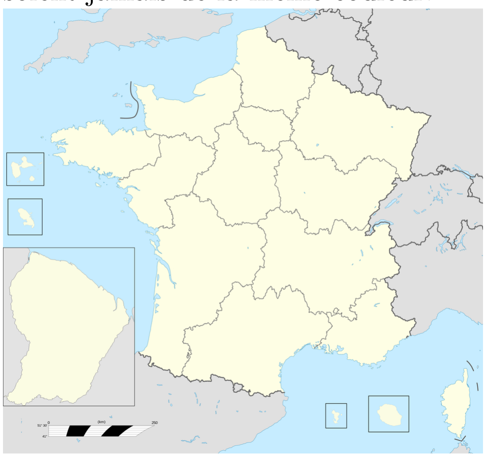
Exercice 4. Représenter les graphes complets d'ordre 1, 2, 3, 4, 5 et 6. À chaque fois, préciser le nombre d'arêtes.

Exercice 5. On donne ci-dessous le plan simplifié d'un lycée.



1. Représenter ce plan par un graphe.
2. Donner le degré de chacun des sommets.
3. À la fin de son cours dans le bâtiment 1, Guillaume doit rejoindre la salle des profs pour un RDV avec ses parents. Déterminer le nombre de chemins de longueur 3 permettant à Guillaume de rejoindre ses parents.
4. Et les chemins de longueur 4 ? Essayez de trouver un méthode algorithmique pour être sûr de ne pas en oublier !
5. Est-il possible de visiter le lycée en empruntant une seule fois chaque passage entre les différents lieux ?

Exercice 6. On souhaite colorier les régions d'une carte de France de sorte que 2 régions adjacentes ne soient jamais de la même couleur.



1. Représenter le problème par un graphe.
2. Donner l'ordre du graphe et sa taille. Est-il complet ? connexe ?
3. Trois couleurs peuvent-elles suffire ? Justifier. On réfléchira à l'Île-de-France et ses voisines.
4. Le théorème des quatre couleurs indique qu'il est possible de colorier **n'importe quelle carte** de la sorte en n'utilisant que **quatre** couleurs différentes. Faites-le !

3. Graphes orientés

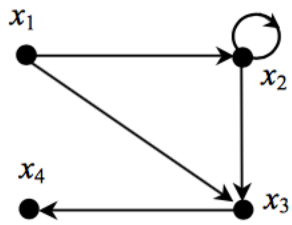
On parle de graphe orienté lorsque les arêtes sont orientées (d'un sommet vers l'autre).

Définition

Un **graphe orienté** est un couple $G = (S, A)$ où :

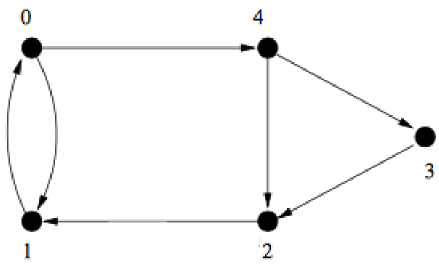
- S est un ensemble fini, dont les éléments sont encore appelés **sommets** ou **noeuds** du graphe.
- A est un sous-ensemble de $S \times S$, c'est-à-dire un ensemble de **couples** d'éléments de S.
  Les éléments de A sont appelées **arcs**.

Représentation : On représente les arcs par des **flèches** qui indiquent leur sens.
Par exemple, le graphe $G = (S, A)$ avec
$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et $A = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_3, x_4), (x_2, x_2), (x_2, x_3)\}$
est représenté ci-contre.



Exercice 7. Représenter le graphe orienté $G = (S, A)$, où $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A = \{(1, 2), (2, 4), (4, 3), (4, 2), (1, 1), (5, 3), (3, 2)\}$.

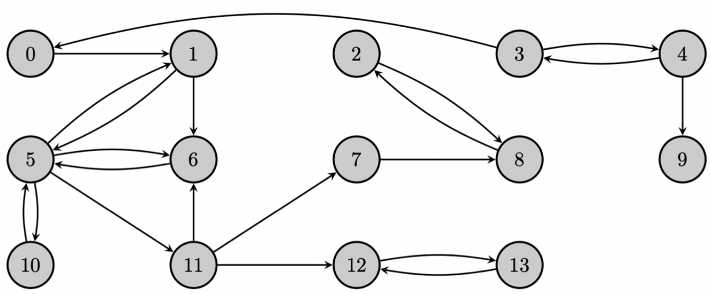
Exercice 8. Donner S et A pour le graphe représenté ci-dessous :



Vocabulaire

- On parle encore de chemins, en prenant garde qu'ils doivent être parcourus "dans le bon sens".
- On parle de **circuit** pour désigner les chemins dont les sommets de départ et d'arrivée sont les mêmes (on peut passer plusieurs fois par le même arc dans un circuit !)
- On distingue le **degré entrant** et le **degré sortant** d'un sommet, qui correspondent respectivement au nombre d'arcs arrivant ou partant de ce sommet.

Exercice 9. On considère le graphe ci-dessous :



1. Combien y a-t-il de circuits de longueur 2 dans ce graphe ?
2. Quels sont les circuits de longueur 3 ?

3. Existe-t-il un chemin de 11 à 4 ? Et de 4 à 11 ?
4. Quelle est la distance entre les sommets 4 et 11 ?
5. Donner les degrés sortants et entrants du sommet 11 et du sommet 5.

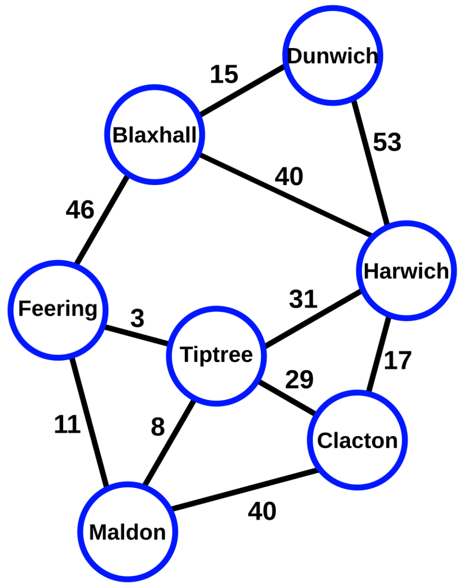
4. Étiquettes et pondération

Considérons un graphe du réseau de trains français. En contemplant ce graphe, je peux connaître tous les chemins pour aller de Bordeaux à Grenoble, ainsi que le chemin avec le moins de correspondances. Cependant, le graphe tel quel ne m'indiquera pas le chemin le plus rapide ! Il faudrait pour cela rajouter à chaque arête le temps de trajet correspondant... On parle alors de graphe pondéré.

Définition

On dit qu'un graphe est **étiqueté** lorsque ses arêtes (ou ses arcs) sont affectées d'étiquettes (mots, lettres, symboles, nombres, ...). Dans le cas où les étiquettes sont des *nombres*, le graphe est dit **pondéré**.
Formellement : on a la donnée d'une application $p : A \to \mathbb{R}$.
Les étiquettes sont alors appelées les **poids** des arêtes (ou arcs).
Le **poids d'un chemin** est la somme des poids des arêtes (arcs) constituant le chemin.

Exercice 10. On considère le graphe non orienté et pondéré suivant, qui représente les temps de trajets entre quelques villes anglaises.



1. Quel est le poids maximal d'une arête de ce graphe ?
2. Déterminer le cycle de poids minimal.
3. Quel est le trajet le plus court de Maldon à Clacton ?
4. Déterminer le chemin de poids le plus faible qui passe par tous les sommets du graphe.

Exercice 11. Donner des exemples variés de situations de la vie réelle qui peuvent se modéliser par des graphes pondérés.