Interro 10

1. Donner la formule du binôme de Newton et développer $(a-b)^4$ pour $a, b \in \mathbb{C}$.

   Solution : La formule du binôme est dans le cours... Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on a :
   $(a-b)^4 = a^4 + 4a^3(-b) + 6a^2(-b)^2 + 4a(-b)^3 + (-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

2. Calculer les sommes suivantes en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

   a) $\displaystyle\sum_{1 \leq j < i \leq n} 2$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$ c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i} i^2$

   Solution :

   a) On somme une quantité constante, donc on obtient le nombre de termes fois la constante. Ici, dans un triangle strict, le nombre de termes vaut $\dfrac{n(n-1)}{2}$, donc la somme vaut $n(n-1)$.

   b) On doit intervertir les sommes, en prenant garde aux bornes des indices ! On a :

   $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2j} = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{n(n+3)}{4}$$

   c) Ici, aucun besoin d'intervertir ! On a :

   $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i} i^2 = \sum_{i=1}^{n}(i+1)i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{i=1}^{n} i^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   En factorisant au maximum, on obtient :

   $$\frac{n(n+1)}{12}\left(3n(n+1) + 2(2n+1)\right) = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$$