Interro 12

1. (1,5 points) Donner la définition d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

   Solution : Cours : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{4+u_n}{3}$.
   a) (3 points) Déterminer le terme général de la suite (u_n).
   b) (1,5 points) Donner en justifiant la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   c) (1,5 points) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

   Solution :
   a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
   On cherche $l \in \mathbb{R}$ qui vérifie $l = \dfrac{4+l}{3}$. Or :
   $l = \dfrac{4+l}{3} \iff 3l = 4 + l \iff 2l = 4 \iff l = 2$
   Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - l = u_n - 2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $v_{n+1} = u_{n+1} - l = \dfrac{4+u_n}{3} - \dfrac{4+l}{3} = \dfrac{u_n - l}{3} = \dfrac{v_n}{3}$
   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -1$. Ainsi :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -\dfrac{1}{3^n}$
   D'où finalement :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 - \frac{1}{3^n}}$$
   b) La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3} \in]0,1[$ et de premier terme $-1 < 0$, donc elle est strictement croissante et converge vers 0.
   Ainsi, la suite (u_n) est strictement croissante et converge vers 2.
   c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(2 - \frac{1}{3^k}\right) = \sum_{k=0}^{n} 2 - \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = 2(n+1) - \frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}$
   D'où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = 2(n+1) - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = 2n + \frac{1}{2} - \frac{3}{2\times 3^{n+1}}$

3. On définit une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $w_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_{n+1} = \sqrt{1+w_n}$.
   a) (1,5 points) Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de w_n.
   b) (1,5 points) En déduire une fonction Python `produit_w(n)` qui renvoie la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} w_k$.

   Solution :
   a)

```python
from math import sqrt
def suite_w(n):
    w = 5
    for i in range(2, n+1):
        w = sqrt(1+w)
    return w
```

   b)

```python
def produit_w(n):
    produit = 1
    for k in range(1, n+1):
        produit = produit * suite_w(k)
    return produit
```