Interro 13

1. (2,5 points) Énoncer le théorème d'intégration par parties.

   Solution : Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Soient $a, b \in I$. Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

2. (2 points) Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{(x+3)^2} + 2xe^{x^2}\right)dx$

   Solution :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{(x+3)^2} + 2xe^{x^2}\right)dx = \left[-\frac{1}{x+3} + e^{x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{4} + e - \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = e + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 1 = e - \frac{11}{12}$$

3. (2,5 points) Par changement de variable $u = \sqrt{2t-1}$, calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2t\sqrt{2t-1}}dt$.

   Solution : On réalise le changement de variable $u = \sqrt{2t-1}$, donc $du = \dfrac{2}{2\sqrt{2t-1}}dt = \dfrac{1}{\sqrt{2t-1}}dt$.
   On a aussi $2t = u^2 + 1$, et quand t varie de $\frac{1}{2}$ à 1, u varie de 0 à 1.
   Ainsi, on a :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2t\sqrt{2t-1}}dt = \int_0^1 \frac{1}{u^2+1}du = [\arctan(u)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

4. (3,5 points) Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction suivante sur $\mathbb{R}_+^*$: $f : x \mapsto \ln(x)(x^3 - 2x)$

   Solution : On sait qu'une primitive de f sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est donnée par la fonction

$$F : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \ln(t)(t^3 - 2t)dt$$

   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On calcule l'intégrale $F(x)$ par intégration par parties.
   Pour tout $t > 0$, on pose $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \dfrac{t^4}{4} - t^2$.
   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $t > 0$, on a $u'(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = t^3 - 2t$.
   Par intégration par parties, on peut alors calculer :

$$\begin{aligned}
F(x) = \int_1^x \ln(t)(t^3 - 2t)dt &= \int_1^x u(t)v'(t)dt \\
&= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u'(t)v(t)dt \\
&= \left[\ln(t)\left(\frac{t^4}{4} - t^2\right)\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}\left(\frac{t^4}{4} - t^2\right)dt \\
&= \ln(x)\left(\frac{x^4}{4} - x^2\right) - 0 - \int_1^x \left(\frac{t^3}{4} - t\right)dt \\
&= \ln(x)\left(\frac{x^4}{4} - x^2\right) - \left[\frac{t^4}{16} - \frac{t^2}{2}\right]_1^x \\
&= \ln(x)\left(\frac{x^4}{4} - x^2\right) - \left(\frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{16} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des fonctions :

$$x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x)\left(\frac{x^4}{4} - x^2\right) - \frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} + C$$

pour $C \in \mathbb{R}$.