Correction.

Interro 14

Bilan semestriel. Durée : 1h

1. Soient E, F deux ensembles. Donner la définition d'une fonction surjective de E dans F, avec les quantificateurs. $f : E \to F$ est dite surjective lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent par f :
$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$

2. Si E et F sont deux ensembles finis. Compléter :
Card $(\mathcal{F}(E,F)) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}$ Card$(\mathcal{P}(F)) = 2^{\mathrm{Card}(F)}$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes, puis leur négation.
   a) f est impaire et majorée par 5 : $(\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x))$ et $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 5)$
   Négation : $(\exists x \in \mathbb{R}, f(-x) \neq -f(x))$ ou $(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > x)$
   b) f est strictement décroissante : $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$
   Négation : $\exists x, y \in \mathbb{R}, (x < y$ et $f(x) \leq f(y))$

4. Compléter les formules trigonométriques. Pour $a, b, x \in \mathbb{R}$:
   - $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
   - $\tan(\pi - x) = \tan(-x) = -\tan(x)$
   - $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

5. On définit $z \in \mathbb{C}$ par $z = \dfrac{i}{2-2i}$.
   a) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z :

$$z = \frac{i(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{2i+2i^2}{4-(2i)^2} = \frac{2i-2}{4+4} = \frac{-2+2i}{8} = \frac{-1+i}{4}$$

Donc $\mathrm{Ré}(z) = -\frac{1}{4}$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{4}$

   b) Mettre z sous forme exponentielle, (rédaction prise en compte)

On cherche $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$. On sait que

$$r = |z| = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16}} = \sqrt{\tfrac{2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Donc θ vérifie $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-1/4}{\sqrt{2}/4} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1/4}{\sqrt{2}/4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$. Donc $\theta = \frac{3\pi}{4}$ convient.

Ainsi, on a : $z = \dfrac{\sqrt{2}}{4} e^{\frac{3i\pi}{4}}$.

6. a) Compléter les formules d'Euler : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
   b) Compléter la formule du binôme : $\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
   c) Linéariser $\sin^4(x)$:

$$\sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{3ix-ix} + 6e^{2ix-2ix} - 4e^{ix-3ix} + e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{4ix}+e^{-4ix} - 4e^{2ix} - 4e^{-2ix} + 6\right) = \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6\right)$$

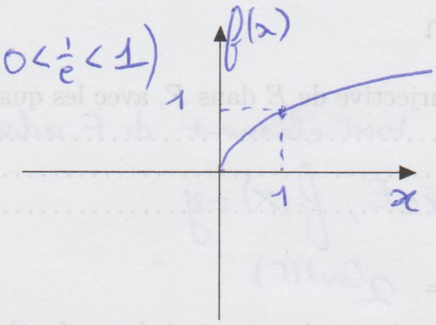
+

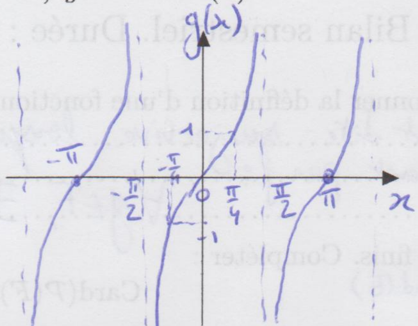
$$\sin^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}.$$

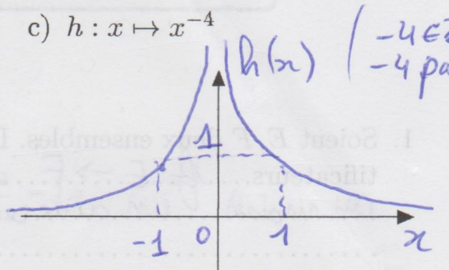
7. Tracer le graphe des fonctions suivantes sur leur domaine de définition. On fera apparaître les éventuelles asymptotes et valeurs remarquables.

a) $f : x \mapsto x^{\frac{1}{e}}$ b) $g : x \mapsto \tan(x)$ c) $h : x \mapsto x^{-4}$

$(0 < \frac{1}{e} < 1)$







$\left|\begin{array}{l} -4 \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N} \\ -4 \text{ pair} \end{array}\right.$

8. Déterminer en justifiant soigneusement chacune des limites suivantes :

+

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$

$\forall x > 0,\ x^x = e^{x\ln(x)}$. Or par croissance comparée : $x\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$. Ainsi, par composition par la fonction continue exponentielle, $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 2x}{1 - x^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1, 0\}$. $\frac{x^3+2x}{1-x^2} = \frac{x^3\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}$

$= x\left(\frac{1+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-1}\right)$. Or $x \to +\infty$ et par opérations : $\frac{1+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{-1} = -1$. D'où :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3+2x}{1-x^2} = -\infty$

9. Pour chacune des fonctions suivantes, donner son domaine de définition, sa dérivée et une primitive :

a) $f(x) = xe^{-x^2}$

Domaine : $\mathbb{R}$

Dérivée :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1e^{-x^2} + x \times (-2x)e^{-x^2}$
$= (1-2x^2)e^{-x^2}$

Primitive :

$x \mapsto \frac{e^{-x^2}}{-2} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ convient

b) $g(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$

Domaine : $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Dérivée :

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. $g'(x) = \frac{-3(x-1)^2}{((x-1)^3)^2} = \frac{-3}{(x-1)^4}$

Primitive : $g(x) = (x-1)^{-3}$ donc

$x \mapsto \frac{(x-1)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2(x-1)^2}$ convient.

10. On considère le système : $(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 3y & - & 2z & - & t & = & 0 \\ & & -2y & + & z & - & 5t & = & 0 \\ & & & & & & 3t & = & 0 \end{array}\right.$

Description : (S_1) est un système linéaire de 3 équations à 4 inconnues. Il est homogène et échelonné, de rang 3 avec comme 3 inconnues principales x, y et t (pivots : 2, -2 et 3) et z comme unique inconnue secondaire.

(S_1) est-il compatible ? Justifier : Oui, car il n'y a pas d'équation de la forme "$0 = b$" avec $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ou : oui car il est ~~échelo~~ homogène

Combien (S_1) admet-il de solutions ? Justifier : (S_1) est échelonné compatible et a une inconnue secondaire, donc il admet une infinité de solutions

11. Calculer l'intégrale suivante à l'aide du changement de variable $x = \ln(t)$: $I = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{t(2\ln(t)+1)}dt$

On pose $\begin{cases} x = \ln(t) \\ dx = \frac{1}{t}\,dt \end{cases}$. On a alors $I = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{2\ln(t)+1}\left(\frac{1}{t}dt\right) = \int_0^1 \frac{1}{2x+1}dx$

$= \left[\frac{\ln(2x+1)}{2}\right]_0^1 = \frac{\ln(3)}{2} - \frac{\ln(1)}{2} = \frac{\ln(3)}{2}$.

12. Résoudre les équations et inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{6-5x} > x$

Domaine d'existence : $6-5x \geq 0 \iff x \leq \frac{6}{5}$

Résolution : $\left]-\infty, \frac{6}{5}\right]$.

+

• Si $x \in \mathbb{R}_-^*$, comme une racine est toujours positive, l'équation est vérifiée.

• Si $x \in \left[0, \frac{6}{5}\right]$, on peut élever au carré :

$\sqrt{6-5x} > x \iff 6-5x > x^2$

$\iff x^2+5x-6 < 0$

$\iff (x+6)(x-1) < 0$

$\iff x \in]-6, 1[\iff x \in [0, 1[$.

D'où $\mathcal{S} = \mathbb{R}_-^* \cup [0,1[=]-\infty, 1[$

b) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin(x)$

$\iff \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} \equiv x \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x - \frac{\pi}{3} \equiv \pi - x \ [2\pi] \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \\ \text{ou } 3x \equiv \frac{4\pi}{3} \ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{4\pi}{9} \ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$

$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

13. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n$. Déterminer une expression explicite de u_n en fonction de n. On a une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

On pose l'équation caractéristique : (E_c) $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = 4 + 12 = 16 > 0$, donc elle a deux solutions réelles distinctes :

$q_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ et $q_2 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

On sait donc qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda \times (-3)^n + \mu \times 1^n$.

Mais alors $\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu = 1 \\ u_1 = -3\lambda + \mu = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ -4\lambda = 1 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ $\iff \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{4} \\ \mu = 1 - \lambda = \frac{5}{4} \end{cases}$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\frac{1}{4}(-3)^n + \frac{5}{4}$.

14. **Python :**

a) Écrire une fonction `factorielle(n)`, qui prend en argument un nombre n, et qui :

- renvoie la valeur de $n!$, si n est un entier positif ;
- affiche le message "l'argument doit être un entier positif !", sinon.

b) Soit (u_n) une suite définie par $u_1 = -10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{u_n}{2}$.

Écrire une fonction `suite_u(n)`, qui prend en entrée un entier $n \geq 1$ et qui renvoie la valeur de u_n.

c) On admet que la suite définie à la question précédente converge vers 0. Écrire un script Python qui affiche le premier rang n pour lequel u_n est proche de 0 à moins de 10^{-3}.

a)

```
def factorielle (n):
    if type(n)==int and n>=0 :
        res = 1
        for k in range (1,n+1):
            res = res * k
        return res
    else :
        ~~retur~~
        print ("l'argument doit être positif !")
```

b)

```
def suite_u (n):
    u = -10
    for k in range (1, n):
        u = 1/k - u/2
    return u
```

c)

```
rang = 1
while abs(suite_u(rang)) > 10**(-3) :
    rang += 1
print(rang).
```