Interro 15

1. (2 points) Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices. On donnera soigneusement toutes les hypothèses nécessaires.

   Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices *carrées* qui **commutent**. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a :
   $$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^{m-k} B^k$$

2. (5 points) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Pour chacune des opérations suivantes : faire le calcul si c'est possible, et justifier pourquoi sinon.

   a) AB b) BA c) $2B$ d) $3A + B$
   e) $(B - I_3)^2$ f) $B^\top A^\top$ g) $B - 2$ h) $AA^\top$

   Solution :

   - $AB = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 2 \\ -13 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, par produit matriciel.
   - BA n'existe pas, puisque le nombre de colonnes de B est différent du nombre de lignes de A $(3 \neq 2)$.
   - $2B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, en multipliant coefficient par coefficient.
   - $3A + B$ n'existe pas car $3A$ et B ne font pas la même taille ($3A$ a 2 lignes alors que B a 3 lignes)
   - $B - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc on a $(B - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
   - On a $B^\top A^\top = (AB)^\top = \begin{pmatrix} 11 & -13 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
   - $B - 2$ n'existe pas car on ne peut pas soustraire une matrice et un nombre réel.
   - $A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, donc $AA^\top = \begin{pmatrix} 14 & -21 \\ -21 & 43 \end{pmatrix}$

3. (2 points) Donner la définition d'une matrice inversible.

   Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice *carrée*. On dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $AB = BA = I_n$. NB : en fait, une seule des deux égalités est nécessaire.

4. (1 point) Recopier et compléter : pour toutes les matrices $A, B \in \ldots\ldots\ldots\ldots$, on a $(AB)^{-1} = \ldots\ldots\ldots$

   Solution : pour toutes les matrices $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

5. *Bonus :* La matrice B de la question 2 est-elle inversible ? Justifier.

   Solution : La matrice B a une colonne nulle, donc tout produit AB avec $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ aura nécessairement une colonne nulle : on aura toujours $AB \neq I_3$. Ainsi, B n'est pas inversible !