Interro 16

1. (1,5 points) Soit D une matrice diagonale d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Compléter : D est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

2. (6 points) Pour chacune des matrices ci-dessous, déterminer son rang, et calculer son inverse lorsqu'elle est inversible.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solution :

1. La matrice A est de taille 2×2, et son déterminant vaut $\det(A) = 5 \times 2 - (-3) \times (-4) = 10 - 12 = -2 \neq 0$.

   Ainsi, A est inversible. Elle est donc de rang 2, et son inverse est donné par $A^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

2. On applique le pivot de Gauss à la matrice B. Après les deux premières transvections, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, puis $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est échelonnée de rang 2. Donc B est de rang 2, et ainsi elle n'est pas inversible.

3. On applique le pivot de Gauss étendu à la matrice C et à la matrice I_3 simultanément. On obtient $\mathrm{rg}(C) = 3$, donc C est inversible, et on trouve comme inverse : $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. (2,5 points) À l'aide de la question précédente, résoudre le système $(S) : \begin{cases} x - z &= -3 \\ -2x + 3y + 4z &= 1 \\ y + z &= 5 \end{cases}$.

Solution : On a $(S) \iff CX = Y$ où C est la matrice de la question précédente, $Y = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et l'inconnue est $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Comme C est inversible, le système admet une unique solution, donnée par $X = C^{-1}Y$.

On obtient donc $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -15 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions du système (S) est : $\mathcal{S} = \{(17, -15, 20)\}$.