Interro 17

1. (3,5 points) Avec l'équation différentielle corrigée : $-2y'' - y' - y = 0$.
On a une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, et homogène.
Son équation caractéristique est $(E_c) : -2x^2 - x - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$.
L'équation caractéristique a donc deux racines complexes conjuguées, données par :
$z_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{7}}{-4} = -\dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ et $z_2 = \overline{z_1} = -\dfrac{1}{4} - i\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.
Ainsi, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = e^{-\frac{x}{4}} \left(\lambda \cos\left(x\frac{\sqrt{7}}{4} \right) + \mu \cos\left(x\frac{\sqrt{7}}{4} \right) \right), \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
Avec l'équation de l'énoncé : $-2y'' - y' - 1 = 0$, on pouvait tout de même résoudre. On pose $(E) : -2y'' - y' = 1$, et l'équation homogène associée $(E_H) : -2y'' - y' = 0$.
L'équation caractéristique est $(E_c) : -2x^2 - x = 0$, c'est-à-dire $-x(2x+1) = 0$. Ses deux racines réelles distinctes sont donc $r_1 = 0$ et $r_2 = -\dfrac{1}{2}$.
Ainsi, les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_h(x) = \lambda + \mu e^{-\frac{x}{2}}, \quad$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Reste à chercher une solution particulière, sous la forme $y_p(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$ à déterminer.
On a alors $y_p'(x) = a$ et $y_p''(x) = 0$, donc on doit avoir : $-a = 1$.
Ainsi, la fonction $y_p : x \mapsto -x$ est solution particulière de (E).
Finalement, les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda + \mu e^{-\frac{x}{2}} - x, \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2. (6,5 points) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle : $xy' + \dfrac{1}{x}y = xe^{\frac{1}{x}}$
Sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, x ne s'annule pas, et l'équation est équivalente à $(E) : y' + \dfrac{1}{x^2}y = xe^{\frac{1}{x}}$.

   - L'équation homogène associée à (E) est $(E_H) : y' + \dfrac{1}{x^2}y = 0$.
   Comme une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur I est $A(x) = -\dfrac{1}{x}$, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad y_H(x) = \lambda e^{\frac{1}{x}}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - Soit $\lambda : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et pour tout $x \in I$, $y_P(x) = \lambda(x)e^{\frac{1}{x}}$ une solution potentielle de (E).
   On a, pour tout $x \in I$, $y_P'(x) = \lambda'(x)e^{\frac{1}{x}} - \dfrac{1}{x^2}\lambda(x)e^{\frac{1}{x}}$.
   On doit donc avoir, pour tout $x \in I$: $\lambda'(x)e^{\frac{1}{x}} - \dfrac{1}{x^2}\lambda(x)e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^2}\lambda(x)e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}$, c'est-à-dire :
   $$\lambda'(x) = 1$$
   λ doit donc être une primitive de $x \mapsto 1$ sur $]0, +\infty[$: $\lambda(x) = x$ convient.
   Ainsi, $y_p(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ est une solution particulière de (E) sur $]0, +\infty[$.
   - Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :
   $$y(x) = \lambda e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$