

Interro 18

1. (2 points) Énoncer le théorème de la limite monotone pour les suites décroissantes.
 Toute suite décroissante et minorée converge vers une limite finie.
 Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

2. (2 points) Donner la définition de deux suites adjacentes.

Deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites adjacentes lorsque :

- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante (ou vice-versa)
- $v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

3. (4 points) À l'aide du théorème d'encadrement ou de comparaison, étudier la convergence des suites :

a) $u_n = \sqrt{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

b) $u_n = \frac{(n+5)\cos(n)}{n^2-3}$

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $\frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n}$.

Ainsi : $u_n \geq \sqrt{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n} = \sqrt{n} \times n \times \frac{1}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Ainsi, par comparaison à une suite divergente, on a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-1 \leq \cos(n) \leq 1$.

Alors, pour tout $n \geq 2$ (pour avoir $n^2 - 3 > 0$), on a : $\frac{-(n+5)}{n^2-3} \leq u_n \leq \frac{n+5}{n^2-3}$.

Or, $n+5 \sim n$ et $n^2-3 \sim n^2$, donc $\frac{n+5}{n^2-3} \sim \frac{n}{n^2} \sim \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Et de même, $-\frac{n+5}{n^2-3} \sim -\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, on a aussi : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

4. (2,5 points) Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $u_n = n^2 \tan\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} - 1\right)$.

On a $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc on sait que $\sqrt{1 - \frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{n}\right)$.

Ainsi, on a $\sqrt{1 - \frac{1}{n}} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On sait donc que $\tan\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} - 1\right) \sim \sqrt{1 - \frac{1}{n}} - 1 \sim -\frac{1}{2n}$.

Finalement, on a $u_n \sim n^2 \times \left(-\frac{1}{2n}\right) \sim -\frac{n}{2}$.