

## Interro 19

1. (2 points) Donner la définition de trois vecteurs **coplanaires** de l'espace.

Trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  de l'espace sont dits coplanaires lorsque l'un peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres.

De manière équivalente, ils sont dits coplanaires lorsqu'il existe  $\lambda, \mu, \nu$  trois scalaire non tous nuls tels que  $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{w} = \vec{0}$ .

2. (2 points) Les vecteurs  $\vec{u} = (2, 6)$  et  $\vec{v} = (-1, 4)$  sont-ils colinéaires ? Sont-ils orthogonaux ?

$$\text{On a } \det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - (-1) \times 6 = 8 + 6 = 14 \neq 0.$$

Ainsi,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas coplanaires.

D'autre part,  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 \times (-1) + 6 \times 4 = -2 + 24 = 22 \neq 0$ .

Ainsi,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas orthogonaux.

3. (2,5 points) Donner en justifiant soigneusement une équation paramétrique du plan passant par :  $A(1, 6, 2)$ ,  $B(0, 1, -1)$  et  $C(-2, 3, 1)$ .

On nomme  $\mathcal{P}$  ce plan. Deux vecteurs directeurs de  $\mathcal{P}$  sont alors  $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , qui sont

bien non colinéaires.

Soit  $M(x, y, z)$  un point de l'espace. On a alors :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\iff M, A, B, C \text{ sont coplanaires} \\ &\iff \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \text{ sont coplanaires} \\ &\iff \exists s, t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{BM} = s\overrightarrow{BA} + t\overrightarrow{BC} \\ &\iff \exists s, t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \\ z + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - 2t \\ 5s + 2t \\ 3s + 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Une représentation paramétrique du plan  $\mathcal{P}$  est alors :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x &= s - 2t \\ y &= 1 + 5s + 2t \\ z &= -1 + 3s + 2t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

4. (3,5 points) En déduire une équation cartésienne de ce plan.

À l'aide des équations en  $x$  et  $z$ , qu'on note respectivement  $L_1$  et  $L_3$  :

$$L_1 + L_3 \text{ donne } x + z = -1 + 4s, \text{ donc } s = \frac{x + z + 1}{4}.$$

$$L_3 - 3L_1 \text{ donne } z - 3x = -1 + 8t \text{ donc } t = \frac{z - 3x + 1}{8}.$$

Finalement, en réinjectant dans l'équation en  $y$  :

$$y = 1 + 5s + 2t = \frac{4 + 5x + 5z + 5 + z - 3x + 1}{4} = \frac{10 + 2x + 6z}{4} = \frac{x + 3z + 5}{2}$$

Ainsi, on a une équation cartésienne de  $\mathcal{P}$ , donnée par :  $\boxed{\mathcal{P} : x - 2y + 3z + 5 = 0}$