

## Interro 2

1. **Python** : Écrire une fonction Python `fonction(a,b)` qui prend en argument deux entiers  $a$  et  $b$ , et qui **renvoie** :

- $-1$  si  $a = 0$ ;
- $a^b$  si  $a > 0$ ;
- $a + b$  sinon.

**Solution :**

```

1 def fonction(a,b):
2     if a == 0:
3         return -1
4     elif a > 0:
5         return a**b
6     else:
7         return a+b

```

2. On définit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  à valeurs réelles par  $u_1 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ . Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $u_n = n^2$ .

**Solution :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $P_n$  la propriété :  $u_n = n^2$ . Montrons par récurrence que  $P_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- **Initialisation** ( $n = 1$ ) :  $P_1$  est la propriété :  $u_1 = 1^2 = 1$ . Or  $u_1 = 1$  selon l'énoncé, donc  $P_1$  est bien vraie.
- **Hérédité** : Fixons  $n \in \mathbb{N}^*$  telle que  $P_n$  est vraie, c'est-à-dire  $u_n = n^2$ . Montrons que  $P_{n+1}$  est vraie, c'est-à-dire que  $u_{n+1} = (n+1)^2$ . Or selon l'énoncé,  $u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1$  d'après l'hypothèse de récurrence. D'où :  $u_{n+1} = (n+1)^2$ . Ainsi,  $P_{n+1}$  est bien vraie, d'où l'hérédité.
- En conclusion, on a bien montré que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n = n^2$ .

3. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les deux équations et inéquations suivantes :

$$(E_1) : 4x^2 - x - 1 = x^2 - 3x$$

$$(E_2) : \frac{x}{x-1} \geq \frac{x+3}{x+5}$$

**Solution :**

$$\begin{aligned}
 4x^2 - x - 1 &= x^2 - 3x \iff 3x^2 + 2x - 1 = 0 \\
 \Delta &= 2^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16 > 0, \\
 \text{donc le trinôme a deux racines, données par} \\
 \frac{-2 \pm 4}{6} : x_1 &= \frac{1}{3} \text{ et } x_2 = -1. \\
 \text{On a donc } \mathcal{S} &= \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{x-1} \geq \frac{x+3}{x+5} &\iff \frac{x}{x-1} - \frac{x+3}{x+5} \geq 0 \\
 &\iff \frac{x(x+5)}{(x-1)(x+5)} - \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+5)} \geq 0 \\
 &\iff \frac{x^2 + 5x - (x^2 + 2x - 3)}{(x-1)(x+5)} \geq 0 \\
 &\iff \frac{3x+3}{(x-1)(x+5)} \geq 0
 \end{aligned}$$

Il reste à dresser le tableau de signe de  $f(x) = \frac{3x+3}{(x-1)(x+5)}$  pour conclure.

| $x$    | $-\infty$ | $-5$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|------|------|-----|-----------|
| $3x+3$ | $-$       | $-$  | $0$  | $+$ | $+$       |
| $x-1$  | $-$       | $-$  | $-$  | $0$ | $+$       |
| $x+5$  | $-$       | $0$  | $+$  | $+$ | $+$       |
| $f(x)$ | $-$       | $+$  | $0$  | $-$ | $+$       |

D'où finalement :  $\mathcal{S} = ]-5; -1] \cup ]1, +\infty[$ .