

Interro 20

1. Soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage de x_0 , qui vérifient $f \leq g \leq h$.

Donner les différentes situations possibles concernant f et/ou h qui permettent de conclure sur la convergence de g en x_0 (trois situations, correspondant à deux théorèmes du cours).

- Si f diverge vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 , alors par théorème de comparaison, g diverge également vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 .
- Si h diverge vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 , alors par théorème de comparaison, g diverge également vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 .
- Si f et h convergent tous deux vers la même limite finie $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 , alors selon le théorème d'encadrement (des gendarmes), on a aussi $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$.

2. Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{x^2 - 2x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 3x^2}{e^x - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)(\sqrt{x} - 1)}{\cos(\pi x) + 1}$

- On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$: $\frac{2x - 6}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2(x - 3)}{(x - 3)(x + 1)} = \frac{2}{x + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 3} \frac{2}{3 + 1} = \frac{1}{2}$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{2}$

- On a, au voisinage de 0 : $2x - 3x^2 \underset{0}{\sim} 2x$ et $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.

D'où : $\frac{2x - 3x^2}{e^x - 1} \underset{0}{\sim} \frac{2x}{x} = 2$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 3x^2}{e^x - 1} = 2$.

- On pose $x = 1 + h$. Ainsi, quand x tend vers 1, h tend vers 0.

On a alors : $\frac{\ln(x)(\sqrt{x} - 1)}{\cos(\pi x) + 1} = \frac{\ln(1 + h)(\sqrt{1 + h} - 1)}{\cos(\pi + \pi h) + 1}$.

Or, quand h tend vers 0, on a :

$\ln(1 + h) \underset{0}{\sim} h$, $\sqrt{1 + h} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{h}{2}$, et :

$\cos(\pi + \pi h) + 1 = -\cos(\pi h) + 1 = -(\cos(\pi h) - 1) \underset{0}{\sim} -\left(-\frac{(\pi h)^2}{2}\right)$ car $\pi h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Finalement, on a donc : $\frac{\ln(1 + h)(\sqrt{1 + h} - 1)}{\cos(\pi + \pi h) + 1} \underset{0}{\sim} \frac{h \times \frac{h}{2}}{\frac{\pi^2 h^2}{2}} = \frac{1}{\pi^2}$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)(\sqrt{x} - 1)}{\cos(\pi x) + 1} = \frac{1}{\pi^2}$