

Interro 21

1. (1,5 points) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs :

a) f diverge vers $-\infty$ en $+\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -2$

Solution :

a) $\forall m \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x \geq A \implies f(x) \leq m)$

b) $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x - 5| \leq \alpha \implies |f(x) + 2| \leq \epsilon)$

2. (2 points) Énoncer le théorème de la limite monotone pour les fonctions.

3. (2 points) Énoncer le théorème de la bijection.

4. (2 points) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

5. (3 points) Donner en justifiant des équivalents simples de :

a) $(x^3 - x) \tan\left(\frac{1}{x}\right)$ en $-\infty$

b) $\frac{\sin(x^2)(\cos(x) - 1)}{1 - e^x}$ en 0

c) $\frac{\sqrt{x} - 1}{\ln(x)^2}$ en 1

Solution :

a) $x^3 - x \underset{-\infty}{\sim} x^3$, et $\tan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{-\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ puisque $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

Ainsi, $(x^3 - x) \tan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{-\infty}{\sim} x^3 \frac{1}{x} = x^2$.

b) $\sin(x^2) \underset{0}{\sim} x^2$ puisque $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. De plus, $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ et $1 - e^x = -(e^x - 1) \underset{0}{\sim} -x$.

Ainsi, $\frac{\sin(x^2)(\cos(x) - 1)}{1 - e^x} \underset{0}{\sim} \frac{-x^2 \frac{x^2}{2}}{-x} = \frac{x^4}{2x} = \frac{x^3}{2}$.

c) On pose $x = 1 + h$ avec $h = x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$. On a alors :

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{\ln(x)^2} = \frac{\sqrt{1+h} - 1}{(\ln(1+h))^2}.$$

Or $\sqrt{1+h} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{h}{2}$ et $\ln(1+h) \underset{0}{\sim} h$.

D'où :

$$\frac{\sqrt{1+h} - 1}{(\ln(1+h))^2} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{h}{2}}{h^2} = \frac{1}{2h} = \frac{1}{2(x-1)}.$$