

## Interro 21

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Écrire avec des quantificateurs :

- a)  $f$  diverge vers  $-\infty$  en  $+\infty$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$       c)  $f$  est continue en 1
- a)  $\forall m \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geq A, f(x) \leq m$
- b)  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in ]0, \delta], |f(x) - 3| \leq \epsilon$
- c)  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in [1 - \delta, 1 + \delta], |f(x) - f(1)| \leq \epsilon$

2. Énoncer le théorème de la bijection continue.

3. Énoncer le théorème des bornes atteintes.

4. Après avoir donné son domaine de définition, étudier l'existence d'éventuels prolongements par continuité de la fonction donnée par :

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 + 2x^2}}{x^2 - 2x}$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $2x^2 + 1 \geq 0$ . De plus,  $x^2 - 2x = x(x - 2)$ .

Ainsi, le domaine de définition de  $f$  est :  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ .

On étudie donc l'existence de limites finies en 0 et en 2.

- En 0 :  $1 - \sqrt{1 + 2x^2} = -(\sqrt{1 + 2x^2} - 1) \underset{0}{\sim} -\frac{2x^2}{2} = -x^2$  puisque  $2x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

Ainsi, on a  $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{x(x-2)} \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{-2x} = \frac{x}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

- En 2 :  $1 - \sqrt{1 + 2x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 2} 1 - \sqrt{1 + 2 \times 2^2} = 1 - \sqrt{9} = -2$ .

De plus,  $x \rightarrow 2$  et  $x - 2 \rightarrow 0$ . On doit donc distinguer le cas où  $x \rightarrow 2^-$  et le cas où  $x \rightarrow 2^+$ .

$$- \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - \sqrt{1 + 2x^2}}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2}{2(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} -\frac{1}{x - 2} = -\infty.$$

$$- \text{De même, } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} -\frac{1}{x - 2} = +\infty.$$

Ainsi,  $f$  n'admet pas de limite en 2 (et encore moins de limite finie!)

- En conclusion, on peut prolonger  $f$  par continuité en 0 mais pas en 2, en posant :  $f(x) = 0$ .