

## Interro 22

1. (2 points) a) Que désigne l'ensemble  $\mathbb{R}_3[X]$  ?  
b) Qu'est-ce qu'un polynôme unitaire ?
2. (1,5 points) Donner en justifiant le degré de :  $R = (X^7 - 5) \circ (X^3 + 2) - (X - X^5)^4$
3. (3,5 points) Soit  $P$  qui vérifie  $(X^2 + 1) \times P'(2X) = P(X^2 - 1)$ .  
a) Quels sont les valeurs possibles pour  $\deg(P)$  ?  
b) En déduire l'ensemble des polynômes  $P$  qui vérifient l'égalité.
4. (2 points) Montrer que 2 est racine du polynôme  $T = X^4 - 2X^3 - 5X^2 + 12X - 4$  et donner son ordre de multiplicité.
5. (1 point) Expliquer comment factoriser le polynôme de la question précédente. (Bonus : le faire.)

### Solution :

1. a)  $\mathbb{R}_3[X]$  désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3, c'est-à-dire l'ensemble des  $P = \sum_{k=0}^3 a_k X^k$  où  $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ .  
b) Un polynôme unitaire est un polynôme de coefficient dominant égal à 1, c'est-à-dire un polynôme de la forme  $X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$  avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ .
2. On a  $\deg((X^7 - 5) \circ (X^3 + 2)) = \deg(X^7 - 5) \times \deg(X^3 + 2) = 7 \times 3 = 21$ .  
D'autre part,  $\deg((X - X^5)^4) = 4 \times \deg(X - X^5) = 4 \times 5 = 20$ .  
Comme  $20 < 21$ , on a  $\deg(R) = \max(21, 20) = 21$ .
3. a)
  - Si  $P = 0$ , l'égalité devient  $0 = 0$ , elle est bien vérifiée.
  - Si  $\deg(P) = 0$  ( $P$  constant non nul), on a  $P' = 0$  donc  $\deg((X^2 + 1)P'(2X)) = \deg(0) = -\infty$ . Mais  $\deg(P(X^2 - 1)) = 2 \times \deg(P) = 0$ , donc l'égalité ne peut pas être vraie.
  - Si  $\deg(P) = n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\deg(P') = n - 1$ , donc  $\deg(P'(2X)) = \deg(P') \times \deg(2X) = n - 1$ . Ainsi,  $\deg((X^2 + 1)P'(2X)) = \deg(X^2 + 1) + \deg(P'(2X)) = 2 + n - 1 = n + 1$ . De plus,  $\deg(P(X^2 - 1)) = \deg(P) \times \deg(X^2 - 1) = 2n$ . Ainsi, on a nécessairement  $n + 1 = 2n$ , c'est-à-dire  $n = 1$ .
  - Finalement, les valeurs possibles pour  $\deg(P)$  sont  $-\infty$  et 1.
 b) On a déjà vu que  $P = 0$  convient. Soit désormais  $P = aX + b$  avec  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ . On a  $P' = a$ , donc :  
 $(X^2 + 1) \times P'(2X) = a(X^2 + 1) = aX^2 + a$  et  $P(X^2 - 1) = a(X^2 - 1) + b = aX^2 + b - a$ .  
 Ainsi, par identification,  $P$  vérifie l'égalité si et seulement si  $a = b - a$ , c'est-à-dire  $b = 2a$ .  
 Finalement, les polynômes convenables sont exactement les polynômes de la forme  $P = a(X + 2)$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .
4.
  - $T(2) = 2^4 - 2 \times 2^3 - 5 \times 2^2 + 12 \times 2 - 4 = 16 - 16 - 20 + 24 - 4 = 0$ . Ainsi, 2 est bien racine de  $T$ .
  - $T' = 4X^3 - 6X^2 - 10X + 12$ , donc  $T'(2) = 32 - 24 - 20 + 12 = 0$ . Ainsi, 2 est racine multiple de  $T$ .
  - $T'' = 12X^2 - 12X - 10$ , donc  $T''(2) = 48 - 24 - 10 = 14 \neq 0$ .
  - Ainsi, 2 est racine double du polynôme  $T$ .
5. On sait qu'il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $T = (X - 2)^2 \times Q$  avec  $\deg(Q) = 4 - 2 = 2$ .  
 On pose donc  $Q = aX^2 + bX + c$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Il reste à déterminer  $a, b, c$  par **identification**, puis à trouver les éventuelles racines du trinôme  $Q$  obtenu pour terminer la factorisation.

On sait que  $(X - 2)^2 = X^2 - 4X + 4$ , donc :

$(X - 2)^2 Q = (X^2 - 4X + 4)(aX^2 + bX + c) = aX^4 + (b - 4a)X^3 + (c - 4b + 4a)X^2 + (4b - 4c)X + 4c$ .  
 Par identification, on sait que  $a = 1$ ,  $b - 4a = -2$  donc  $b = -2 + 4a = 2$ ,  $4c = -4$  donc  $c = -1$ , et également  $c - 4b + 4a = -5$  et  $4b - 4c + 12$  qui sont vraies pour ces valeurs de  $a, b, c$ .

Ainsi :  $Q = X^2 + 2X - 1$ . Ce trinôme a pour discriminant  $\Delta = 4 + 4 = 8 > 0$ , donc il admet deux racines réelles distinctes données par  $\frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2}$  et  $-1 + \sqrt{2}$ .  
Finalement, on a  $Q = (X + 1 + \sqrt{2})(X + 1 - \sqrt{2})$ , donc :  $P = (X - 2)^2(X + 1 + \sqrt{2})(X + 1 - \sqrt{2})$ .