

Interro 23

1. a) Donner la définition de : f dérivable à droite en x_0 .
b) Énoncer le résultat sur les extrema locaux.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, qui s'annule en 4 points distincts.
Combien de point d'annulation possède la fonction f' ?

On note $a < b < c < d$ les quatre points d'annulation de f . Comme f est dérivable sur \mathbb{R} , on peut appliquer le théorème de Rolle à chacun des intervalles $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, d]$, et obtenir l'existence de $x \in]a, b[$, $y \in]b, c[$, $z \in]c, d[$ tels que $f'(x) = f'(y) = f'(z)$.

On a donc 3 points d'annulation de f' distincts (puisque $x < y < z$).

Cependant, rien ne permet d'affirmer que ce sont les seuls. Ainsi : f' s'annule en **au moins trois points**.

3. a) Énoncer le théorème des accroissements finis

- b) Montrer soigneusement que : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$, $\left| \ln \left(\frac{1 + \sqrt{2y+1}}{1 + \sqrt{2x+1}} \right) \right| \leq \frac{1}{2} |y - x|$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. Si $x = y$, le résultat est immédiat.

Si $x \neq y$, on peut supposer sans perte de généralité que $x < y$ (quitte à échanger x et y).

On considère la fonction $f : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \ln(1 + \sqrt{2t+1})$.

Pour tout $t \geq 0$, on a $2t+1 > 0$ et $1 + \sqrt{2t+1} > 0$. Ainsi, f est bien définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}^+ .

Sa dérivée est donnée par : $f'(t) = \frac{2}{2\sqrt{2t+1}} \frac{1}{1 + \sqrt{2t+1}} = \frac{1}{\sqrt{2t+1} (1 + \sqrt{2t+1})}$.

f est bien continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$.

On obtient : $\ln(1 + \sqrt{2y+1}) - \ln(1 + \sqrt{2x+1}) = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{2y+1}}{1 + \sqrt{2x+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2c+1} (1 + \sqrt{2c+1})} (y - x)$.

Comme $c \geq 0$, on a $\sqrt{2c+1} \geq \sqrt{1} = 1$, et donc $\frac{1}{\sqrt{2c+1} (1 + \sqrt{2c+1})} \geq \frac{1}{2}$.

On trouve bien : $\ln \left(\frac{1 + \sqrt{2y+1}}{1 + \sqrt{2x+1}} \right) \leq \frac{1}{2} (y - x)$.