Interro 24

1. À l'aide du changement de variable $u = \ln(t)$, calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t\left(1+\ln^2(t)\right)}dt$

   On a $u = \ln(t)$ qui est bien un changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$, et qui donne $du = \dfrac{1}{t}dt$ et $u \in [0, 1]$. On obtient :

$$\int_1^e \frac{\ln(t)}{t\left(1+\ln^2(t)\right)}dt = \int_0^1 \frac{u}{1+u^2}du = \left[\frac{\ln(1+u^2)}{2}\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}$$

2. a) Énoncer le théorème des sommes de Riemann sur un intervalle quelconque.

   Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$$

   b) Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\arctan\left(\frac{k}{n}\right)}{k^2+n^2}$

   On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Sn = \dfrac{n}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\arctan\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{k^2}{n^2}+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

   avec $f : t \in [0, 1] \mapsto \dfrac{\arctan(t)}{t^2+1}$ une fonction continue sur $[0, 1]$.

   D'après le théorème des sommes de Riemann sur $[0, 1]$, on obtient :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\arctan(t)dt = \left[\frac{(\arctan(t))^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - 0 = \frac{\pi^2}{32}$$

   Finalement : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi^2}{32}.}$

3. Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Énoncer l'inégalité triangulaire pour f, et donner la définition de sa valeur moyenne.

   - L'inégalité triangulaire affirme que : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$
   - La valeur moyenne de f est le réel μ défini (si $a \neq b$) par : $\displaystyle\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$

4. a) Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.

   Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in I$.

   Alors la fonction $x \in I \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

   b) Déterminer l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (x+2)\sin(x)$.

   On sait que ces primitives sont les fonctions de la forme $x \mapsto \int_0^x (t+2)\sin(t)dt + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

   Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, par IPP avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $t \mapsto t+2$ et $t \mapsto -\cos(t)$, on a :

$$\int_0^x (t+2)\sin(t)dt = [-(t+2)\cos(t)]_0^x - \int_0^x -\cos(t)dt = [-(t+2)\cos(t) + \sin(t)]_0^x$$

   Ainsi, les primitives de $x \mapsto (x+2)\sin(x)$ sont les fonctions

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x) - (x+2)\cos(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$