Interro 3

1. Soit E une partie de $\mathbb{R}$.
   a) Donner la définition d'un minorant de E, du maximum de E et de la borne supérieure.
   b) Quel est le lien entre le maximum et la borne supérieure ?

   Solution :
   a) Un minorant de E est un élément $a \in \mathbb{R}$ qui vérifie : $\forall x \in E, a \leq x$.
   Le maximum de E (s'il existe) est un élément $a \in \mathbb{R}$ tel que : $a \in E$ et $\forall x \in E, a \geq x$.
   La borne supérieure de E (si elle existe) est le plus petit des majorants de E :
   $\sup(E) = \min\{a \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E, a \geq x\}$.
   b) Lorsque E admet un maximum a, alors il admet aussi une borne supérieure, et on a $a = \max(E) = \sup(E)$. La réciproque est fausse !

2. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

   a) $\ln(x+5) = 2\ln(x) + \ln(4)$ b) $e^{2x} + e^x - 6 = 0$

   Solution : a) Cette équation est définie pour $x > 0$ et $x + 5 > 0$: son domaine d'existence est $]0; +\infty[\cap] - 5; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \ln(x+5) = 2\ln(x) + \ln(4) &\iff \ln(x+5) = \ln(4 \times x^2) \\ &\iff x + 5 = 4x^2 \\ &\iff 4x^2 - x - 5 = 0 \end{aligned}$$

Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 1^2 + 4 \times 4 \times 5 = 1 + 80 = 81 = 9^2 > 0$, donc il a deux racines, données par $\dfrac{1 \pm 9}{8}$, à savoir -1 et $\dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$.
-1 n'est pas dans le domaine d'existence de l'équation, donc l'unique solution est $\dfrac{5}{4}$: $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{5}{4}\right\}$.

b) Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut poser $y = e^x$, et on a alors :

$$e^{2x} + e^x - 6 = 0 \iff y^2 + y - 6 = 0$$

Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 1^2 + 4 \times 6 = 25 = 5^2 > 0$, donc il a deux racines, données par $\dfrac{-1 \pm 5}{2}$, à savoir 2 et -3.
On a donc $e^{2x} + e^x - 6 = 0 \iff (y = -3 \text{ ou } y = 2) \iff (e^x = -3 \text{ ou } e^x = 2$. L'équation $e^x = -3$ n'a pas de solution, et $e^x = 2$ a une unique solution, $\ln(2)$.
Ainsi : $\mathcal{S} = \{\ln(2)\}$.