Interro 4

1. Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs : "a n'est pas le minimum de E".

   Solution : $a \notin E \quad \text{ou} \quad (\exists x \in E, a > x)$

2. Donner les formules de : $\cos(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ et $\tan(-x)$.

   Solution :

   - $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
   - $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
   - $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x)$
   - $\tan(-x) = -\tan(x)$

3. Résoudre les équations et inéquations suivantes sur leur domaine d'existence :

   a) $\ln(2x+3) = 2\ln(x) + 3$ b) $\tan(x) = -1$ c) $2\sqrt{3}\cos(x) - 2\sin(x) = 2\sqrt{2}$

   Solution :

   a) Le domaine d'existence de cette équation est : $\left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[\cap \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}^*+$.
   Pour tout $x > 0$, on a : $\ln(2x+3) = 2\ln(x) + 3 \iff \ln(2x+3) = \ln(x^2) + \ln(e^3) = \ln(e^3x^2) \iff$ $2x + 3 = e^3x^2$ puisque la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Ainsi, on doit résoudre l'équation polynomiale de degré 2 : $e^3x^2 - 2x - 3 = 0$.
   Son discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times e^3 \times (-3) = 4 + 12e^3 = 4(1+3e^3) > 0$.
   Ainsi, on a deux racines : $\dfrac{2 \pm \sqrt{\Delta}}{2e^3} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+3e^3}}{e^3}$.
   Or $\dfrac{1-\sqrt{1+3e^3}}{e^3} < 0$ puisque $\sqrt{1+3e^3} > 1$.
   D'où : $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1+\sqrt{1+3e^3}}{e^3}\right\}$

   b) Le domaine d'existence de cette équation est celui de la fonction tangente : $\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
   On sait que $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$, donc pour tout x du domaine d'existence :
   $\tan(x) = 1 \iff x \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$.
   D'où $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

   c) Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$, et se réécrit : $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}$.
   On cherche $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = r\cos(x+\varphi)$.
   On sait que $r^2 = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.
   De plus, $\cos(\varphi) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{1}{2}$, donc $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ convient.

Ainsi, l'équation se réécrit : $2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$. D'où :

$$\begin{aligned}
(E) &\iff \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+\frac{\pi}{6} & \equiv & \frac{\pi}{4} & [2\pi]\\ \text{ou } x+\frac{\pi}{6} & \equiv & -\frac{\pi}{4} & [2\pi]\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rclcll} x & \equiv & \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6} & \equiv & \frac{\pi}{12} & [2\pi]\\ \text{ou } x & \equiv & -\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6} & \equiv & \frac{-5\pi}{12} & [2\pi]\end{array}\right.
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{5\pi}{12}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$