

Interro 5

1. Soient E, F deux ensembles, et $f : E \rightarrow F$ une application. Donner avec des quantificateurs, puis avec une phrase, la définition de l'assertion : « f est injective ».

Solution : f est injective lorsque : $\forall x, y \in E, (x \neq y \implies f(x) \neq f(y))$

ou encore : $\forall x, y \in E, (f(x) = f(y) \implies x = y)$.

Avec une phrase : f est injective lorsque deux éléments distincts de l'ensemble de départ ont toujours des images distinctes par f .

Ou encore : f est injective lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée a **au plus** un antécédent par f .

2. Représenter sur un schéma une fonction surjective mais non injective.

Solution : Beaucoup de possibilités ! Voir le cours ou un camarade.

3. Donner un exemple d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ni injective, ni surjective.

Solution : Par exemple, la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ n'est pas injective car $f(-1) = f(1)$, et n'est pas surjective car -1 n'a pas d'antécédent par f .

4. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1-2x}{3} \end{cases}$ Justifier brièvement que f est bijective, et déterminer sa réciproque.

Solution : f est injective car c'est une fonction affine non constante, donc elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ (strictement décroissante ici).

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = y \iff \frac{1-2x}{3} = y \iff 1-2x = 3y \iff x = \frac{3y-1}{-2} = \frac{1-3y}{2}$.

Ainsi, on a "inversé la formule" : pour tout $y \in \mathbb{R}$, y a exactement un antécédent par f , donné par $x = \frac{1-3y}{2}$.

L'application f est donc bien bijective, et sa réciproque est donnée par : $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \frac{1-3y}{2} \end{cases}$

5. Donner sans justifier : $\cos(\mathbb{R})$, $\exp(]-\infty, 1])$ et $h([-1, 2])$ où $h : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$.

Solution : On a : $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, $\exp(]-\infty, 1]) =]0, e]$, et $h([-1, 2]) = [0, 4]$.