Interro 8

1. Mettre sous forme exponentielle : $z = \dfrac{(\sqrt{3}i - 3)^2}{-i^7(2-2i)}$

   Solution :

   - On cherche d'abord $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{3}i - 3 = re^{i\theta}$.
     On sait que $r = |\sqrt{3}i - 3| = \sqrt{(-3)^2 + sqrt3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
     Ainsi, θ vérifie : $\cos(\theta) = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$.
     $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ convient, donc on a : $\sqrt{3}i - 3 = 2\sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}}$.
   - On cherche maintenant $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $2 - 2i = re^{i\theta}$.
     On sait que $r = |2 - 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
     Ainsi, θ vérifie : $\cos(\theta) = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
     $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ convient, donc on a : $2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$.
   - On a $i^7 = (i^2)^3 \times i = (-1)^3 i = -i$, donc $-i^7 = i = e^{\dfrac{i\pi}{2}}$.
   - Finalement : $z = \dfrac{\left(2\sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)^2}{e^{\frac{i\pi}{2}}2\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}} = \dfrac{12e^{\frac{5i\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}} = 3\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}$
     D'où : $z = 3\sqrt{2}e^{\frac{17i\pi}{12}}$.

2. Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

   a) $x^2 + 2x + 5 = 0$

   b) $-2x^2 + 3x - 1 = 0$

   Solution :

   a) On a une équation de degré 2 à coefficients réels, de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16 < 0$.
   Ainsi, il existe deux racines complexes (non réelles) conjuguées, données par $z_{1,2} = \dfrac{-2 \pm i\sqrt{16}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$.
   On a donc comme ensemble de solutions dans $\mathbb{C}$: $\mathcal{S} = \{-1 - 2i, -1 + 2i\}$.

   b) On a une équation de degré 2 à coefficients réels, de discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = 9 - 8 = 1 > 0$.
   Ainsi, il existe deux racines réelles distinctes, données par : $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \times (-2)} = \dfrac{-3 \pm 1}{-4} = \dfrac{3 \mp 1}{4}$.
   On a donc comme ensemble de solutions dans $\mathbb{C}$: $\mathcal{S} = \{\frac{1}{2}, 1\}$.

3. Donner sans justifier les formules de Moivre pour $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

   Solution : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

4. *Bonus :* Donner l'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $z^5 + 1 = 0$

   Solution : L'équation se réécrit $z^5 = -1$. On sait que $z_0 = -1$ est une solution (évidente) de cette équation.

   Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $z^5 = -1 \iff z^5 = z_0^5 \iff \left(\dfrac{z}{z_0}\right)^5 = 1 \iff \dfrac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_5$.

   Or les racines 5-ièmes de l'unité sont données par $e^{\frac{0i\pi}{5}} = 1$, $e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $e^{\frac{4i\pi}{5}}$, $e^{\frac{6i\pi}{5}}$ et $e^{\frac{8i\pi}{5}}$.

Ainsi, les solutions de l'équation $z^5 = -1$ sont données par :
$\mathcal{S} = \{-1, -e^{\frac{2i\pi}{5}}, -e^{\frac{4i\pi}{5}}, -e^{\frac{6i\pi}{5}}, -e^{\frac{8i\pi}{5}}\}$