Interro 9

1. Soit $n, p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Donner sans justifier les formules pour les sommes suivantes. Attention au piège.

   a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$ b) $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} q^k$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} n$

   Solution :

   a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ b) $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} q^k = \frac{q^n - q^{p+1}}{1-q}$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} n = (n+1)n$

2. Calculer les sommes suivantes en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i(i^2-1)$

   Solution :

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$.
   On peut le faire directement en remarquant qu'il s'agit d'une **somme télescopique**.
   Sinon, on sépare les deux sommes et on réalise un changement d'indice pour faire s'annuler les termes.

   b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i(i^2-1) = 2\sum_{i=1}^{n}(i^3-i) = 2\left(\sum_{i=1}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} i\right)$
   D'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i(i^2-1) = 2\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)}{2}\right) = 2\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)$
   Or $\displaystyle\frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2+n-2}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$. D'où : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i(i^2-1) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2}$