

Corrigé - DM de Noël - Maths

• Primitives et intégrales:

exo 12 du TD9 - Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a:

$$f(t) = \frac{e^t(1 - e^{-2t})}{e^t(1 + e^{-2t})} = \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}. \text{ Or } -2t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty \text{ et } e^y \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 0.$$

Donc par composition, $e^{-2t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, par opérations:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

De même, on a $f(t) = \frac{e^{-t}(e^{2t} - 1)}{e^{-t}(e^{2t} + 1)} = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$ où $e^{2t} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$, donc

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -1$$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a:

$$f'(t) = \frac{(e^t - (-e^{-t}))(e^t + e^{-t}) - (e^t - e^{-t})(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2}$$

$$= \frac{(e^t + e^{-t})^2 - (e^t - e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^2} = \frac{e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t} - (e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t})}{(e^t + e^{-t})^2}$$

$$= \frac{2 + 2}{(e^t + e^{-t})^2} = \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$: on a

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-1	1

3) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a:

$$f(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(e^t - e^{-t}) = e^t + e^{-t} \quad (\text{puisque } e^t + e^{-t} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow 2e^t + 2e^{-t} = e^t + e^{-t} \Leftrightarrow e^t = 3e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow e^{2t} = 3 \Leftrightarrow 2t = \ln(3) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(3)}{2} = \ln(\sqrt{3}).$$

On a donc $\mathcal{S} = \{\ln(\sqrt{3})\}$.

4) Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = a \Leftrightarrow \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = a \Leftrightarrow e^t - e^{-t} = a(e^t + e^{-t})$$

$$\Leftrightarrow e^t - e^{-t} = ae^t + ae^{-t} \Leftrightarrow e^t(1-a) = e^{-t}(a+1)$$

$$\Leftrightarrow e^{2t}(1-a) = a+1$$

Si $a = 1$, on obtient $f(t) = 1 \Leftrightarrow e^{2t} \times 0 = 2$ donc il n'y a aucune solution.

Si $a \neq 1$:

$$f(t) = a \Leftrightarrow e^{2t} = \frac{a+1}{1-a}$$

* Si $\frac{a+1}{1-a} \leq 0$, i.e. $a \in \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$: il n'y a aucune solution.

* Si $a \in]-1, 1[$: $f(t) = a \Leftrightarrow 2t = \ln\left(\frac{a+1}{1-a}\right) \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a+1}{1-a}\right)$.

Ainsi: • Pour $a \in]-1, 1[$: $\mathcal{Y} = \left\{ \ln\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right) \right\}$
• Pour $a \notin]-1, 1[$: $\mathcal{Y} = \emptyset$.

5) f est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u: t \in \mathbb{R} \mapsto e^t + e^{-t} > 0$.

Ainsi, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donnée par $F = \ln(u)$, i.e:

$$F: t \in \mathbb{R} \mapsto \ln(e^t + e^{-t}) \in \mathbb{R}.$$

6) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $G(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt = F(x+1) - F(x)$
 $= \ln(e^{x+1} + e^{-x-1}) - \ln(e^x + e^{-x}) = \ln\left(\frac{e^{x+1} + e^{-x-1}}{e^x + e^{-x}}\right)$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $G(x) = \ln\left(\frac{e^x(e + e^{-2x-1})}{e^x(1 + e^{-2x})}\right)$ où $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x-1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = 0 \end{cases}$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e + e^{-2x-1}}{1 + e^{-2x}} \right) = \frac{e}{1} = e$$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $G'(x) = F'(x+1) - F'(x) = f(x+1) - f(x) > 0$ car f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi: G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Dénombrements

* Exo 17 du TD 10

1) La donnée d'une application strictement croissante de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ est équivalente à la donnée de l'ensemble des images $\{f(1), \dots, f(n)\} \subset \llbracket 1, p \rrbracket$.

Or le nombre de n -combinaisons de $\llbracket 1, p \rrbracket$ vaut $\binom{p}{n}$.

Il y a donc $\binom{p}{n}$ applications strictement croissantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$.

2) On a plusieurs possibilités pour $f: \llbracket 1, 3 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, 5 \rrbracket$ croissante.

- $f(1) < f(2) < f(3)$: il y a $\binom{5}{3} = 10$ possibilités d'après la question précédente
- $f(1) = f(2) < f(3)$: il y a $\binom{5}{2} = 10$ possibilités selon un raisonnement similaire
- $f(1) < f(2) = f(3)$: $\binom{5}{2} = 10$ possibilités (idem)
- $f(1) = f(2) = f(3)$: $\binom{5}{1} = 5$ possibilités.

Ces possibilités sont incompatibles (2 à 2 disjointes) donc au total : il y a $10 + 10 + 10 + 5 = 35$ applications croissantes de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, 5 \rrbracket$.

3) a) Soit $f: \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$ et $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned}\tilde{f}(k+1) - \tilde{f}(k) &= f(k+1) + (k+1) - 1 - (f(k) + k - 1) \\ &= f(k+1) + k - f(k) - k + 1 \\ &= \boxed{f(k+1) - f(k) + 1}.\end{aligned}$$

On a donc, comme f et $\tilde{f}$ sont à valeurs de départ et d'arrivée entières :

$$\begin{aligned}\underline{f \text{ est croissante}} &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, f(k+1) \geq f(k) \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, f(k+1) - f(k) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, f(k+1) - f(k) + 1 \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, f(k+1) - f(k) + 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \tilde{f}(k+1) - \tilde{f}(k) > 0 \\ &\Leftrightarrow \underline{\tilde{f} \text{ est strictement croissante}}.\end{aligned}$$

b) Soit, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathcal{B}(k)$ la propriété : " $h(k) \geq k$ ".

Initialisation : $h(k) \in \llbracket 1, p+n-1 \rrbracket$ donc on a bien $h(1) \geq 1$: $\mathcal{B}(1)$ est vraie.

hérédité: Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $P(k)$ est vraie. Montrons $P(k+1)$.

$$\begin{aligned} h(k+1) &> h(k) \text{ puisque } h \text{ est strictement croissante} \\ &\geq h(k) + 1 \text{ puisque } h \text{ est à valeurs entières} \\ &\geq k + 1 \text{ par hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

D'où: $P(k+1)$ est vraie. D'où l'hérédité.

On a bien montré que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket: h(k) \geq k$.

• Soit alors f définie sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ par: $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(k) = h(k) - k + 1$.

On a bien $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(k) \in \mathbb{Z}$ et $f(k) \geq 1$ puisque $h(k) - k \geq 0$.

Si par l'absurde $f(k) > p$, alors $h(k) \geq p + k - 1$ et donc $h(n) > p + n - 1$: c'est absurde. Donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket: f(k) \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Enfin, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \tilde{f}(k) = f(k) + k - 1 = h(k) - k + 1 + k - 1 = h(k)$. D'où: $\tilde{f} = h$.

c) Finalement, on a une correspondance exacte entre les applications croissantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ et les applications strictement croissantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n+p-1 \rrbracket$, donc l'ensemble de ces applications a pour cardinal:

$$\binom{p+n-1}{n}$$

Exercice 22 TD10

1) $U_1 = \{a\}, U_2 = \{ba\}, U_3 = \{aba, bba\}$ donc $u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2$

$V_1 = \{b\}, V_2 = \{ab, bb\}, V_3 = \{abb, bab, bbb\}$ donc $v_1 = 1, v_2 = 2, v_3 = 3$

2) ^(Sarnier*) Un mot se finissant par "a" doit nécessairement se finir par "ba", puisqu'on ne peut pas avoir deux "a" consécutifs.

Par contre, un mot se finissant par "b", peut finir en "bb" ou en "ab".

On a donc une correspondance:

$$U_{n+1} = \{ma \mid m \in V_n\} \text{ et } V_{n+1} = \{mb \mid m \in E_n\} = \{mb \mid m \in U_n \oplus V_n\}.$$

D'où
$$\begin{cases} u_{n+1} = \text{Card}(U_{n+1}) = \text{Card}(V_n) = v_n \\ v_{n+1} = \text{Card}(U_n \oplus V_n) = \text{Card}(U_n) + \text{Card}(V_n) = u_n + v_n \end{cases}$$

3) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+2} = v_{n+1} = u_n + v_n = u_n + u_{n+1}$.

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite de Fibonacci. On a: $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$.

Or $u_1 = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$

$u_2 = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \lambda \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} \right) + \mu \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} \right) = \lambda \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) + \mu \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$

D'où le système (S):
$$\begin{cases} \lambda(1+\sqrt{5}) + \mu(1-\sqrt{5}) = 2 \\ \lambda(3+\sqrt{5}) + \mu(3-\sqrt{5}) = 2 \end{cases}$$

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(1+\sqrt{5}) + \mu(1-\sqrt{5}) = 2 \\ 2\lambda + 2\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda(1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}\lambda = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n = F_n$ où (F_n) est la suite de Fibonacci.
(en fait, même relation de réc. $\oplus$ mêmes termes initiaux $\Rightarrow$ même TG).

Puis: $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_{n+1} = F_{n+1} \left(= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$.

4) Finalement: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{Card}(E_n) = u_n + v_n = F_n + F_{n+1} = F_{n+2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2}$

5) Si on modélise les parties de $[1, n]$ par des suites de 0 et 1, ~~où 0 signifie~~:

(a) $k \in A$ avec $a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in A \\ 0 & \text{si } k \notin A \end{cases}$, alors les parties correspondent aux mots formés

à partir de 0 et 1 et ne contenant jamais deux "1" consécutifs. Il y en a donc F_{n+2} !

6) On considère les mots formés de k "1" et $(n-k)$ "0", où on n'a jamais deux "1" consécutifs. Pour former ces mots, on peut écrire tous les "0", et intercaler

des "1" à certains emplacements entre les "0". Il s'agit alors d'un choix sans ordre et sans répétition parmi les $(n-k+1)$ emplacements possibles. Il y a donc $\binom{n-k+1}{k}$ possibilités.

Ainsi, le nombre de parties convenables de cardinal k vaut $\binom{n-k+1}{k}$. On a découpé l'ensemble des parties en fonction de leur cardinal. En passant au cardinal, on obtient:

$$F_{n+2} = \sum_{k=0}^n \binom{n-k+1}{k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n-k+1}{k} \quad \text{puisque } \binom{0}{n+1} = 0$$

$$\text{D'où: } F_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k}$$

On peut d'ailleurs vérifier:

$$\binom{0}{0} = 1 = F_1$$

$$\binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 + 0 = 1 = F_2$$

$$\binom{2}{0} + \binom{1}{1} + \binom{0}{2} = 1 + 1 + 0 = 2 = F_3$$

$$\binom{3}{0} + \binom{2}{1} + \binom{1}{2} + \binom{0}{3} = 1 + 2 + 0 + 0 = 3 = F_4$$

$$\binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} + \binom{1}{3} + \binom{0}{4} = 1 + 3 + 1 + 0 + 0 = 5 = F_5$$

$$\binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} + \binom{2}{3} + \binom{1}{4} + \binom{0}{5} = 1 + 4 + 3 + 0 + 0 + 0 = 8 = F_6$$

$$\binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} + \binom{2}{4} + \binom{1}{5} + \binom{0}{6} = 1 + 5 + 6 + 1 + 0 + 0 + 0 = 13 = F_7$$

$$\binom{7}{0} + \binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3} + 0 + 0 + 0 + 0 = 1 + 6 + 10 + 4 = 21 = F_8$$

$$\binom{8}{0} + \binom{7}{1} + \binom{6}{2} + \binom{5}{3} + \binom{4}{4} + 0 + 0 + 0 + 0 = 1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34 = F_9$$