DM Polynômes

18 - Polynômes d'interpolation de Lagrange

1) Comme $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts,

pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

P s'annule en $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n \iff \exists Q \in \mathbb{R}[X],\ P = (X-a_1)\cdots(X-a_{k-1})(X-a_{k+1})\cdots(X-a_n)Q$

avec $\deg(Q) = \deg(P) - (n-1)$

Donc pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a : $\deg Q \leq 0$ et donc $Q = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour P de degré $n-1$:

P s'annule en $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ P = \lambda(X-a_1)\cdots(X-a_{k-1})(X-a_{k+1})\cdots(X-a_n)$

On a bien un unique polynôme unitaire convenable, donné pour $\lambda = 1$ par

$$\boxed{P = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (X-a_i)}$$

2) Soit $P = \lambda \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (X-a_i)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$P(a_k) = \lambda \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (a_k - a_i) \neq 0$ puisque les (a_j) sont 2 à 2 distincts.

Ainsi, avec $\lambda = \dfrac{1}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (a_k - a_i)}$, on a $P(a_k) = 1$ et $\forall i \in [\![1, n]\!] \setminus \{k\}, P(a_i) = 0$

Et c'est l'unique valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ convenable.
D'où l'existence et l'unicité, avec $\boxed{L_k = \dfrac{1}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (a_k - a_i)} \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (X-a_i)}$

3) On pose $P = \sum_{k=1}^{n} b_k L_k$. On a alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$P(a_j) = \sum_{k=1}^{n} b_k L_k(a_j) = 0 + \dots + 0 + b_j 1 + 0 + \dots + 0 = b_j$. Donc P convient.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\deg(b_k L_k) \leq \deg(L_k) = n-1$, donc $\boxed{\deg(P) \leq n-1.}$

4. Le polynôme $Q = \sum_{k=1}^{n} L_k$ vérifie :

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $Q(a_k) = 1$. D'où : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $(Q-1)(a_k) = 0$.

Comme $Q-1$ est de degré $\leq n-1$ et admet n racines distinctes :

$Q-1=0$. D'où : $Q=1$, i.e. $\boxed{\sum_{k=1}^{n} L_k = 1}$

19 Relations coefficients-racines

1. En écrivant $P = a(X-x)(X-y)(X-z)$

$$= a(X-x)(X^2 - yX - zX + yz)$$

$$= aX^3 - ayX^2 - azX^2 + ayzX - axX^2 + axyX + axzX - axyz$$

$$= aX^3 - a(x+y+z)X^2 + a(xy+xz+yz)X - axyz$$

Par identification, on obtient : $\begin{cases} a = a \\ b = -a(x+y+z) \\ c = a(xy+xz+yz) \\ d = -axyz \end{cases}$

2. a) Soit P le polynôme unitaire qui annule x, y, z. Alors

$P = X^3 + bX^2 + cX + d$ où $\begin{cases} b = -(x+y+z) = -2 \\ c = xy+xz+yz \\ d = -xyz = 0 \end{cases}$

Or $\underbrace{(x+y+z)^2}_{2^2} = \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{=2} + \underbrace{2(xy+xz+yz)}_{+2c}$ donc $2^2 = 2 + 2c$. Ainsi : $c = \frac{4-2}{2} = 1$.

D'où : $P = X^3 - 2X^2 + X = X(X^2 - 2X + 1) = X(X-1)^2$.

Les racines (x, y, z) de P sont alors les triplets : $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ et $(1,1,0)$

Réciproquement, ces triplets sont bien solutions du système. D'où :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\}}$$

b) On note P le polynôme unitaire de degré 3 $(X-x)(X-y)(X-z)$.

On a alors $P = X^3 + bX^2 + cX + d$ où

$$\begin{cases} b = x+y+z = 6 \\ c = xy+xz+yz \\ d = -xyz \end{cases}$$

Or $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$

donc $6^2 = 14 + 2c$

et ainsi $c = \frac{36-14}{2} = 11$

De plus, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{yz+xz+xy}{xyz} = \frac{c}{-d}$ donc

$-\frac{11}{6} = \frac{c}{-d} = \frac{11}{-d}$. D'où $d = +6$.

On obtient $P = X^3 + 6X^2 + 11X + 6$

$= (X+1)(X^2+5X+6)$ ↙ racine évidente

$= (X+1)(X+2)(X+3)$ ↙ $\Delta = 1 > 0$: $x_1 = -2$, $x_2 = -3$

D'où les solutions : $\boxed{\mathcal{S} = \{(-1,-2,-3), (-1,-3,-2), (-2,-1,-3), (-2,-3,-1), (-3,-1,-2), (-3,-2,-1)\}}$

20] Polynômes de Tchebychev.

1) $P_3 = 2XP_2 - P_1 = 2X \times 2X - 1 = 4X^2 - 1$

$P_4 = 2XP_3 - P_2 = 2X(4X^2-1) - 2X = 8X^3 - 4X$

2) On montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $H(n)$: " $\deg(P_n) = n-1$ et $CD(P_n) = 2^{n-1}$ " où $CD(\cdot)$ désigne le coefficient dominant.

(I) : c'est vrai d'après l'énoncé pour $n=1$ et $n=2$

(H) : Soit $n \geq 1$ tel que $H(n)$ et $H(n+1)$ sont vraies. Alors $\deg(2XP_{n+1}) = 1 + \deg(P_{n+1}) = 1+n+1 = n+2$

et $\deg(P_n) = n < n+2$.

Donc $\deg(2XP_{n+1} - P_n) = \deg(2XP_{n+1}) = n+2$, et $CD(P_{n+2}) = CD(2XP_{n+1}) = 2\times CD(P_{n+1})$
$= 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$.

$H(n+2)$ est encore vraie. D'où le résultat :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \deg(P_n) = n-1 \text{ et } CD(P_n) = 2^{n-1}}$$

3) On montre de même par récurrence double que la propriété $H'(n)$: "$\sin(n\theta) = \sin\theta\, P_n(\cos\theta)$" est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

(I). $\sin(1\theta) = \sin\theta$ et $P_1(\cos\theta) = 1$, donc $H'(1)$ est bien vraie.

$\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$ et $P_2(\cos\theta) = 2\cos\theta$, donc $H'(2)$ est bien vraie.

(H). Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $H'(n)$ et $H'(n+1)$ sont vraies.

D'une part : $\sin((n+2)\theta) = \sin(n\theta)\cos(2\theta) + \cos(n\theta)\sin(2\theta)$

D'autre part : $\sin\theta\, P_{n+2}(\cos\theta) = \sin\theta\left(2\cos\theta\, P_{n+1}(\cos\theta) - P_n(\cos\theta)\right)$

$= 2\cos\theta\sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta)$ par H.R.

$= 2\cos\theta\left(\sin(n\theta)\cos\theta + \cos(n\theta)\sin\theta\right) - \sin(n\theta)$

$= \sin(n\theta)\left(2\cos^2\theta - 1\right) + \cos(n\theta)\times 2\cos\theta\sin\theta$

$= \sin(n\theta)\cos(2\theta) + \cos(n\theta)\sin(2\theta)$

$= \sin((n+2)\theta)$

$H(n+2)$ est encore vrai.

D'où le résultat : $\boxed{\forall n\geq 1,\quad \sin(n\theta) = \sin(\theta)\, P_n(\cos\theta)}$

4) Soit $x\in\,]0,\pi[$. $\sin(nx) = 0 \iff nx \equiv 0\ [\pi]$

$\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ nx = k\pi$

$\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ x = \frac{k\pi}{n}$

$\iff \exists k\in[\![1, n-1]\!],\ x = \frac{k\pi}{n}$ puisque $x\in\,]0,\pi[$

D'où $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{k\pi}{n}\ \middle|\ 1\leq k\leq n-1\right\}}$

5) $\forall\theta\in\mathcal{S}$, on a $P_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = 0$ puisque $\sin\theta\neq 0$ ($\theta\in\,]0,\pi[$).

Or les $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $1\leq k\leq n-1$ sont 2 à 2 distincts puisque cos est strictement décroissante sur $]0,\pi[$. On a donc obtenu $n-1$ racines distinctes de P_n.

Comme $\deg(P_n) = n-1$, on a trouvé les seules racines de P_n. D'où : $\boxed{P_n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)}$

6) On applique la factorisation précédente à $\cos(\theta)$.