

DM Toussaint - Corrigé

1 Au cas par cas...

2 Nombres complexes $\Delta \mathbb{Z}$ n'a un sens que pour $z = x+iy \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$!!

1) $\overline{z+1} = \bar{z} + \bar{1} = \bar{z} + 1$. Ainsi, $|\bar{z} + 1| = |\overline{z+1}| = |z+1|$.

Enfin, on a donc : $|\mathbb{Z}| = \left| \frac{z+1}{\bar{z}+1} \right| = \frac{|z+1|}{|\bar{z}+1|} = \frac{|z+1|}{|z+1|} = 1$

2) $\mathbb{Z} = \frac{x+iy+1}{x-iy+1} = \frac{(x+iy+1)(x+iy+1)}{(x-iy+1)(x+iy+1)} = \frac{(x+1)^2 + 2(x+1)(iy) + (iy)^2}{(x+1)^2 - (iy)^2}$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 + 2(x+1)yi - y^2}{x^2 + 2x + 1 + y^2}$$

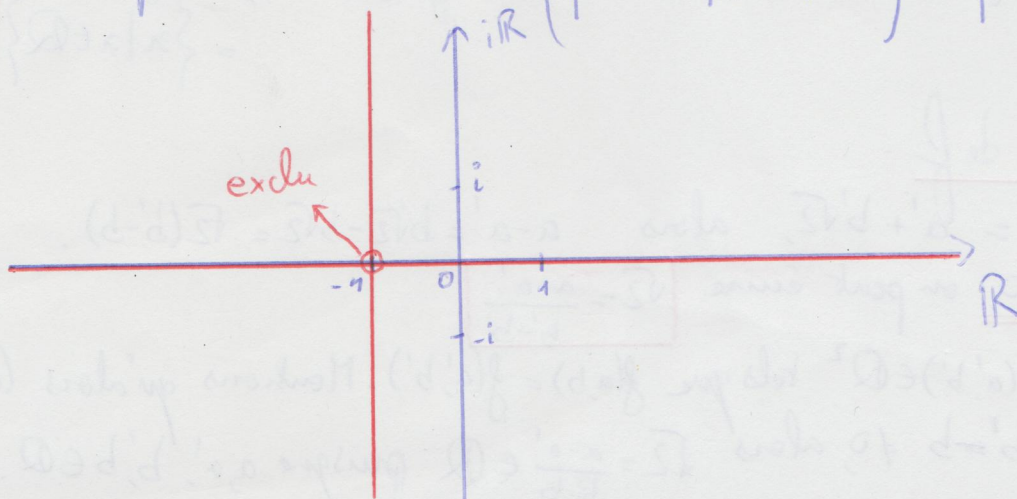
$$= \underbrace{\frac{x^2 + 2x + 1 - y^2}{x^2 + 2x + 1 + y^2}}_{\text{Re}(\mathbb{Z})} + i \underbrace{\frac{2(x+1)y}{x^2 + 2x + 1 + y^2}}_{\text{Im}(\mathbb{Z})}$$

3) $\mathbb{Z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(\mathbb{Z}) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)y}{x^2 + 2x + 1 + y^2} = 0$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } y = 0$$

4) Ainsi, on représente l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) = -1\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 0\}$

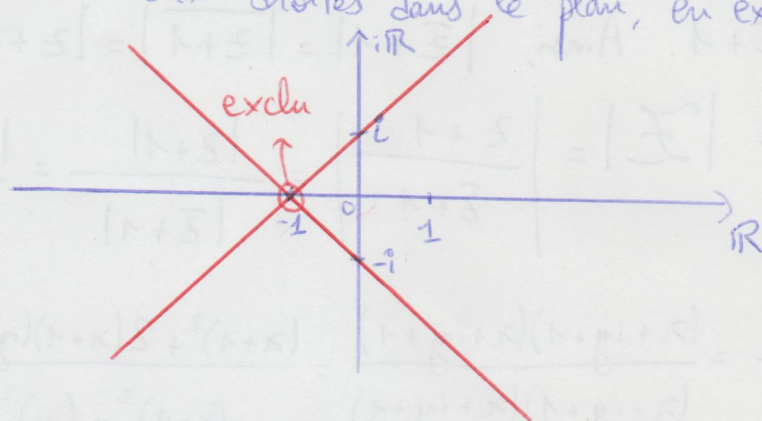


5) De même: $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2 - y^2}{(x+1)^2 + y^2} = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = y^2 \Leftrightarrow x+1=y \text{ ou } x+1=-y$$

$$\Leftrightarrow y=x+1 \text{ ou } y=-x-1$$

Il reste à tracer deux droites dans le plan, en excluant $z=-1$:



3) 1) Préliminaires

a) Il s'agit d'un raisonnement par l'absurde

b) Soient $x, y \in \mathbb{Q}$. Montrons que $x+y \in \mathbb{Q}$. On écrit

$x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ et $d \neq 0$. Alors on a:

$$x+y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \text{ où } ad+bc \in \mathbb{Z} \text{ et } bd \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

D'où $x+y \in \mathbb{Q}$.

2) $f(0,1) = 0 + (-1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

$$f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = \frac{2}{3} + 0\sqrt{2} = \frac{2}{3}$$

$$\forall x \in \mathbb{Q}, f(x, 0) = x + 0\sqrt{2} = x. \text{ D'où } f(\mathbb{Q} \setminus \{0\}) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{Q}\} = \{x \mid x \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}.$$

3) Propriétés de f .

a) Si $a+b\sqrt{2} = a'+b'\sqrt{2}$, alors $a-a' = b'\sqrt{2} - b\sqrt{2} = \sqrt{2}(b'-b)$.

Si $b'-b \neq 0$, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a-a'}{b'-b}$

b) Soient $(a,b), (a',b') \in \mathbb{Q}^2$ tels que $f(a,b) = f(a',b')$. Montrons qu'alors $(a,b) = (a',b')$.
On sait que si $b'-b \neq 0$, alors $\sqrt{2} = \frac{a-a'}{b'-b} \in \mathbb{Q}$ puisque $a, a', b', b \in \mathbb{Q}$.

Or $\sqrt{2}$ est irrationnel, donc c'est absurde. Ainsi, on a nécessairement $b-b'=0$, c'est-à-dire $b=b'$.

Mais alors $a-a' = \sqrt{2}(b'-b) = \sqrt{2} \times 0 = 0$, donc $a=a'$.

On a bien $a=a'$ et $b=b'$, donc $(a,b) = (a',b')$.

D'où l'injectivité de f

c) Soit par l'absurde $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $f(a,b) = \sqrt{3}$, c'est-à-dire $a + b\sqrt{2} = \sqrt{3}$. Alors :

$$(a + b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} = (\sqrt{3})^2 = 3.$$

$$\text{D'où : } 2ab\sqrt{2} = 3 - a^2 - 2b^2$$

* Si $a=0$, on a $b\sqrt{2} = \sqrt{3}$ donc $2b^2 = 3$, donc $b = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \notin \mathbb{Q}$.
C'est absurde.

* Si $b=0$, on a $a^2 = 3$, donc $a = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$: c'est absurde.

* Sinon, $ab \neq 0$ donc $\sqrt{2} = \frac{3 - a^2 - 2b^2}{2ab} \in \mathbb{Q}$: c'est absurde.

Ainsi, $\sqrt{3}$ ne peut pas admettre d'antécédent par f

d) $\sqrt{3}$ n'a pas d'antécédent par f donc f n'est pas surjective : elle est injective mais non bijective.

$$\text{4) } f(\mathbb{Q}^2) = E = \left\{ f(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \right\} = \left\{ a + b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$\text{5) a) Soit } x \in \mathbb{R}. \quad x \in E \Leftrightarrow \exists a,b \in \mathbb{Q}, x = a + b\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \exists a,b \in \mathbb{Q}, x+1 = (a+1) + b\sqrt{2} \quad \left(\begin{array}{l} \downarrow a' = a+1 \\ \uparrow a = a'-1 \end{array} \right)$$
$$\Leftrightarrow \exists a',b \in \mathbb{Q}, x+1 = a' + b\sqrt{2} \Leftrightarrow x+1 \in E.$$

$$\text{D'où } 1|_E(x) = 1|_E(x+1).$$

$$\text{De même, } 1|_E(x) = 1|_E(x+\sqrt{2}).$$

Ainsi, g est bien 1-périodique et $\sqrt{2}$ -périodique.

b) Soit $x \in \mathbb{Q}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a par le même raisonnement que précédemment : $y \in E \Leftrightarrow y+x \in E$. D'où $g(y) = g(y+x)$.

Donc g est bien x -périodique.

c) On peut trouver des rationnels strictement positifs arbitrairement petits, donc on peut trouver des périodes de g aussi proche de 0 que voulu.

Ainsi, g n'admet pas de plus petite période strictement positive.
Autrement dit: $\{T \in \mathbb{R}^+ \mid g \text{ est } T\text{-périodique}\}$ n'a pas de minimum

d) Il s'agit de E . Montrons-le.

- $\forall a+b\sqrt{2} \in E$, on a bien: $\forall n \in \mathbb{R}, n \in E \Leftrightarrow n+a+b\sqrt{2} \in E$ donc g est $(a+b\sqrt{2})$ -périodique
- Si $T \in \mathbb{R}^+$ est une période de g , alors $g(T) = g(0+T) = g(0) = 1$ donc $T \in E$.

TD 4 exo 14 - d) à i).

d) $D_f = [1, 2[$, dérivable sur $]1, 2[$.

$$\forall x \in]1, 2[: f'(x) = \frac{1}{2(2-x)^2} \sqrt{\frac{2-x}{x-1}} > 0 \text{ donc } f \nearrow.$$

$f(1) = 0$. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ par opérations et composition par la racine carrée.

$$f(1.5) = 1 \quad f'(1.5) = \frac{1}{2 \times \frac{1}{4}} \times \sqrt{1} = 2. \rightarrow T_{1.5} : y = 1 + 2(x - \frac{3}{2}) = 2x - 2$$

Tracé : asymptote verticale ($x=2$), valeurs en 1 et $\frac{3}{2}$, tangente en $\frac{3}{2}$.

e) $f(x) = e^{\frac{1}{x} \ln(x)}$ $D_f = \mathbb{R}^{++}$, dérivable sur D_f par composition et opérations.

$$\forall x \in D_f : f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \ln(x) + \frac{1}{x^2} \right) e^{\frac{1}{x} \ln(x)} = \frac{1}{x^2} (1 - \ln(x)) e^{\frac{1}{x} \ln(x)}$$

$$1 - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$$

$$f(e) = e^{\frac{1}{e}} (> 1 \text{ car } \frac{1}{e} > 0)$$

$$f(1) = 1, f'(1) = 1 \rightarrow T_1 : y = (x-1) + 1 = x.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} e^y = e^0 = 1.$$

asymptote horizontale : $y=1$
tangente horizontale en $x=e$: $y=e^{\frac{1}{e}}$
tangente en 1 : $y=x$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$e^{\frac{1}{e}}$	1

f) $D = \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$. $D_{et} = [0, \pi]$ car f est paire et 2π -périodique

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -3\sin(x) - 3x(-\sin(3x)) = 3(\sin(3x) - \sin(x)) = 6 \sin(x) \cos(2x)$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos(2x)$	+	0	-	0
$f(x)$	2	$2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	2

On a aussi des tangentes horizontales, $\sin D_{et} \geq 0$ en 0 et en π .

On complète par parité puis périodicité.

$$\textcircled{*} \sin(3x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x)$$

$$= 2\cos^2 x \sin x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = 2\cos^2 x \sin x - 2\sin^3 x + \sin x.$$

$$\text{Donc } \sin(3x) - \sin(x) = 2\sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\sin(x) \cos(2x).$$

g) $D_f = \mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x(1-x^2) \frac{e^{-x^2}}{>0}$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$1-x^2$	-	0	+	0	-
$2x$	-	-	0	+	+
$f'(x)$	+	0	-	0	-
f					

$a = -1 < 0$
 $a = 1 > 0$

f est paire
($D_f = \mathbb{R}^+$ convenait).

$$f(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}, f(0) = 0, f(1) = f(-1) = \frac{1}{e}$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$ par croissance comparée. $\leadsto$ Asymptote horizontale ($y=0$)

h) $D_f = \mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^{2x}(2x+1) - 2e^x e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2}$

$$\text{Or } e^x - e^{3x} \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^{3x} \Leftrightarrow x \geq 3x \Leftrightarrow 0 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

$$f(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}(1 + \frac{1}{e^{2x}})} = \frac{1}{e^x(1 + \frac{1}{e^{2x}})} = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

D'où : f est paire ($D_f = \mathbb{R}^+$ convenait)

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \leadsto$ asymptote horizontale ($y=0$).

i) $D_f = \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \underbrace{(2x^2+1)}_{>0} (e^x - e^{x^2})$.

$$\text{Or } e^x - e^{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq x^2 \Leftrightarrow x(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 1].$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	0	-
$f(x)$				

$$f(0) = 5, f(1) = 3e - 1e = 2e (> 5)$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 4x + 5)e^x = 0$ par croissance comparée donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par opérations

$$\forall x \neq 0, f(x) = x e^{x^2} \left(-1 + \underbrace{2x e^{x^2}}_{\xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty} + \left(\underbrace{\frac{5}{x^2}}_{\xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0} - 4 \right) \underbrace{e^{x^2}}_{\xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} -\infty \text{ par opérations.}$$