Correction du DM de Printemps

TD 21 - Intégration

Exo 7.-

1) $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$. $\quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,dt = [-\cos(t)\sin(t)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt \quad \text{par IPP}$$

$$= 0 + \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))\,dt = \frac{\pi}{2} - I_2.$$

D'où $2I_2 = \frac{\pi}{2}$, et ainsi $I_2 = \frac{\pi}{4}$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin(t) \leq 1$ donc $0 \leq \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$.

Ainsi, la suite $\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien décroissante}}$ et minorée par 0.

D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.
(et $\ell \leq \frac{\pi}{4}$...)

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par IPP avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$: $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \sin^{n+1}(t)$:

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t)\sin(t)\,dt = \left[-\cos(t)\sin^{(n+1)}(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos(t) \times \cos(t) \times (n+1)\sin^n(t)\,dt$$

$$= (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^n(t)\,dt = (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)\,dt$$

$$= (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt - (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t)\,dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

$$\boxed{= (n+1)(I_n - I_{n+2})}.$$

D'où $(1+(n+1))I_{n+2} = (n+1)I_n$, et ainsi : $\boxed{(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.}$

4. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $H(p)$ la propriété " $I_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$ et $I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$ "

(I) $p=0$: $I_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{0!}{(2^0 0!)^2}$ et $I_1 = 1 = \frac{(2^0 0!)^2}{1!}$ donc $H(1)$ est vraie.

(H) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $H(p)$ est vraie. Montrons $H(p+1)$.

$$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} = \frac{2p+1}{2(p+1)} \times \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!(2p+1)(2p+2)}{2^{2p}p!\,2(p+1)\,2(p+1)} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!}$$

$$I_{2(p+1)+1} = I_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1} = \frac{2p+2}{2p+3} \times \frac{2^{2p}p!^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p+2}(p+1)!^2}{(2p+3)!}$$

D'où $H(p+1)$.

On a bien, par principe de récurrence : $\boxed{H(p) \text{ est vrai pour tout } p \in \mathbb{N}.}$

5. (**) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

→ Si n est pair, on écrit $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Alors :

$$I_n I_{n+1} = I_{2p} I_{2p+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{\pi}{2(2p+1)} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

→ Sinon, on écrit $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Alors :

$$I_n I_{n+1} = I_{2p+1} I_{2p+2} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} \frac{\pi}{2} \frac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{2p+2}{(2\times(p+1))^2} = \frac{\pi}{2(2p+2)} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

Dans tous les cas, on a bien l'égalité cherchée.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on a $I_n \leqslant I_{n-1} \leqslant I_{n-2}$, par décroissance de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'où : $1 \geqslant \frac{I_n}{I_{n-1}} \geqslant \frac{I_n}{I_{n-2}}$. Or d'après la relation de récurrence :

$\frac{I_n}{I_{n-2}} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Ainsi, par encadrement :

$$\boxed{\frac{I_n}{I_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

c) On en déduit que $I_n I_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} I_n I_n = I_n^2$. D'où :

$I_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$. Ainsi : $\boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$

Exercice 8 - Lemme de Riemann-Lebesgue

1. Soit M le maximum de la fonction $|f'|$ sur $[0,1]$, qui existe d'après le théorème des bornes atteintes puisque $|f'|$ est continue sur le segment $[0,1]$.

Alors par inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\int_0^1 f'(x)\sin(n\pi x)\,dx\right| \leq \int_0^1 |f'(x)|\,|\sin(n\pi x)|\,dx$$
$$\leq \int_0^1 M \times 1\,dx = M$$

par croissance de l'intégrale.

D'où le résultat.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions f et $x \mapsto \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Par intégration par parties, on a :

$$\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx = \left[f(x)\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{f'(x)\cos(n\pi x)}{n\pi}\,dx$$
$$\boxed{= -\frac{1}{n\pi}\int_0^1 f'(x)\cos(n\pi x)\,dx} \text{ puisque } \sin(n\pi) = \sin(0) = 0.$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \left|-\frac{1}{n\pi}\int_0^1 f'(x)\cos(n\pi x)\,dx\right| = \frac{1}{n\pi}\left|\int_0^1 f'(x)\cos(n\pi x)\,dx\right| \leq \frac{M}{n\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc par encadrement, on a bien :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

TD 25 - Fonctions de 2 variables

Exo 4 -

1. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$, on a $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left(\ln(x^2+y^2)+\dfrac{x\times 2x}{x^2+y^2}\right)e^{x\ln(x^2+y^2)}}$

et $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{x\times 2y}{x^2+y^2}e^{x\ln(x^2+y^2)}}$

2. En $(0,0)$. On considère la fonction partielle f_1, définie sur $\mathbb{R}$ par
$f_1(x)=\begin{cases}e^{x\ln(x^2)} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$. Alors $\forall x\neq 0$:

$$\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0}=\frac{e^{x\ln(x^2)}-1}{x}=\frac{e^{2x\ln(x)}-1}{x}\underset{0}{\sim}\frac{2x\ln(x)}{x}\quad\text{car } \underbrace{2x\ln(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0}_{(C.C.)}$$

$$\underset{0}{\sim}2\ln(x)\xrightarrow[x\to 0]{}-\infty.$$

Les taux d'accroissements admettent une limite infinie, donc f_1 n'est pas dérivable en 0.

Ainsi : $\boxed{f \text{ n'admet pas de dérivée partielle par rapport à } x \text{ en } (0,0)}$

3. $\forall y\in\mathbb{R}^*$, $f(0,y)=e^{0\ln(0+y^2)}=e^0=1$. Ainsi, la fonction partielle $f(0,\cdot)$ est constante égale à 1. En particulier, elle est dérivable en 0 de dérivée nulle.

D'où : $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0}$

Exo 10 -

1. f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-4=2(x-2)\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-3=3(y-1)(y+1)$$

Ainsi : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ $\boxed{\iff x=2 \text{ et } y\in\{-1,1\}}$

f admet exactement deux points critiques : $(2,-1)$ et $(2,1)$.

En conclusion, les deux seuls extrema potentiels de f sont en $\boxed{(2,-1) \text{ et en } (2,1)}$

2. Soit $k \in [-3,+\infty[$ et $h \in \mathbb{R}$. $f(2+h,1+k)-f(2,1) = (2+h)^2-4(2+h)+(1+k)^3-3(1+k)-(4-8+1-3)$

$= 4+\cancel{4h}+h^2-8-\cancel{4h}+1+\cancel{3k}+3k^2+k^3-3-\cancel{3k}+6$

$= h^2+3k^2+k^3 \boxed{= h^2+k^2(3+k) \geq 0}$ car $3+k \geq 0$.

3. D'où : $\forall k \in [-3,+\infty[, \forall h \in \mathbb{R}, f(2+h,1+k) \geq f(2,1)$.

f admet bien un minimum local en $(2,1)$.

Cependant, $f(0,-3) = 0-0-27+9 = -18 < -6 = f(2,1)$. Donc ce minimum n'est pas un minimum global.

4. Soit $t \in \mathbb{R}$. $f(2+t,-1) = (2+t)^2-4(2+t)-1+3 = 4+\cancel{4t}+t^2-8-\cancel{4t}+2$

$= t^2-2$

$f(2,-1+t) = 4-8+(t-1)^3-3(t-1) = -4+t^3-3t^2+\cancel{3t}-1-\cancel{3t}+3$

$= t^3-3t^2-2$

$= t^2(t-3)-2$

Enfin, $f(2,-1) = 4-8-1+3 = -2$.

Ainsi, pour t proche de 0 (par exemple $t \in]-3,3[\setminus\{0\}$) :

$f(2+t,-1) > f(2,-1)$ MAIS $t-3<0$ donc $f(2,-1+t) < f(2,-1)$

Ainsi, $\boxed{f \text{ n'admet pas d'extremum local en } (2,-1)}$.