

TD Ch 0 – Logique et raisonnement

Corrigé des exos 9 et 10

II. Quantificateurs

9. Nier chacune des assertions suivantes, puis dire si elle est vraie ou fausse.

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ | b) $\exists a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ | c) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$ |
| d) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, x = y^2$ | e) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^+, x = y^2$ | f) $\forall t \in \mathbb{R}^+, \exists \epsilon > 0, \frac{1}{t} \geq \epsilon$ |
| g) $\forall t \in \mathbb{R}^+, \exists \epsilon > 0, \frac{1}{t} > \epsilon$ | h) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (ab = 0) \implies (a = 0 \text{ ou } b = 0)$ | |

Solution :

- a) L'assertion est fausse (par exemple $x = -1 < 0$). Sa négation est : $\exists x \in \mathbb{R}, x < 0$.
- b) L'assertion est vraie (par exemple avec $a = 0$). Sa négation est : $\forall a \in \mathbb{R}, a < 0$.
- c) L'assertion est vraie (en prenant, pour $x \geq 0$ quelconque, $y = \sqrt{x}$).
Sa négation est : $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, x \neq y^2$.
- d) L'assertion est fausse (si par l'absurde elle était vraie, alors tous les nombres positifs seraient égaux).
Sa négation est : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}^+, x \neq y^2$.
- e) L'assertion est fausse (par exemple avec $x = -1$, qui n'est le carré d'aucun réel).
Sa négation est : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^+, x \neq y^2$.
- f) L'assertion n'a pas de sens pour $t = 0$, il s'agit d'une erreur de l'énoncé ! On devrait écrire :
 $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \exists \epsilon > 0, \frac{1}{t} \geq \epsilon$. Cette assertion est vraie (en prenant, pour $t > 0$ quelconque, $\epsilon = \frac{1}{t} > 0$).
Sa négation est : $\exists t \in \mathbb{R}_+^*, \forall \epsilon > 0, \frac{1}{t} < \epsilon$.
- g) Encore une fois, il faut remplacer $\mathbb{R}^+$ par $\mathbb{R}_+^*$. L'assertion est encore vraie, avec par exemple $\epsilon = \frac{1}{2t}$.
Sa négation est : $\exists t \in \mathbb{R}_+^*, \forall \epsilon > 0, \frac{1}{t} \leq \epsilon$
- h) Cette assertion est vraie, c'est la propriété des produits nuls sur $\mathbb{R}$.
Sa négation est : $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, (ab = 0) \text{ et } (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$.

10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Écrire les assertions suivantes à l'aide des quantificateurs, puis donner leur négation.

- | | |
|---|---|
| a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est strictement positif. | b) f est croissante sur $\mathbb{R}$. |
| c) Il existe un réel dont l'image par f est négative. | d) f est paire. |
| e) f ne s'annule jamais. | f) f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$. |
| g) f est constante sur $\mathbb{R}$. | h) f est périodique. |

Solution :

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$. Sa négation est : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0$.
- b) $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a \leq b \implies f(a) \leq f(b))$. Négation : $\exists a, b \in \mathbb{R}, (a \leq b) \text{ et } f(a) > f(b)$.
- c) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0$. Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.
- d) $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, f(-x) \neq f(x)$.
- e) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
- f) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = n$. Négation : $\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq n$.
- g) Deux possibilités :
 • $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$. Négation : $\exists x, y \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(y)$.
 • $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c$. Négation : $\forall c \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq c$.
- h) $\exists T \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$. Négation : $\forall T \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}, f(x + T) \neq f(x)$.