

I-Orde 1

1

a) $y(x) = \lambda e^{-x} + x^2 - x + 2, \lambda \in \mathbb{R}$ b) $y(t) = \lambda e^{-\frac{t^2}{2}} + t^2 - 2t + 2, \lambda \in \mathbb{R}$

c) $y(t) = \lambda e^{t^3} - \frac{1}{3}, \lambda \in \mathbb{R}$ d) $y(x) = \lambda e^{-3x} + \left(\frac{5}{2}x^2 + x\right)e^{-3x}, \lambda \in \mathbb{R}$

e) $y(t) = \lambda e^{-t^3} + \frac{1}{3} + t e^{-t^3}, \lambda \in \mathbb{R}$ f) $y(t) = \lambda e^{-t} + \ln(1+e^t)e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}$

g) $y(x) = \lambda e^x - \left(\frac{\cos(x) \sin(x)}{2}\right), \lambda \in \mathbb{R}$ h)

i) $y(x) = \lambda e^{ix} + \left(x - \frac{x^2}{2}\right)e^{ix}, \lambda \in \mathbb{R}$

2

a) $y(x) = 3 e^{\frac{-x}{3}} + 2x - 1$

b) $y(x) = \lambda e^{-\ln(\ln(t))} = \frac{\lambda}{\ln(t)}$

$y(x) = \frac{\lambda}{\ln(t)} - \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(t)^2}{2}$

$y(e) = \lambda - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

$y(x) = \frac{1}{\ln(t)} - \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(t)^2}{2}$

c) $y(t) = \frac{\lambda}{\sin(t)} - \frac{\ln(\cos t)}{\sin(t)}$ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{2}/2} - \frac{\ln(\sqrt{2}/2)}{\sqrt{2}/2} = 1$

$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\ln(2)}{2}$

$y(t) = \frac{\sqrt{2} - \ln(2)}{2 \sin(t)} + \frac{\ln(\cos t)}{\sin(t)}$

d) $y(x) = \lambda(x+1)e^{-x} + (x-2)$

$y(1) = \frac{2\lambda e}{e} - 1 = -1 \Rightarrow \lambda = 0$

$y(x) = x - 2$

3) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de l'équation.

On pose $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f sur $\mathbb{R}$, qui existe puisque f est continue. Alors, on sait que F est dérivable et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = f(x) = \frac{3x}{2} \int_0^x f(t) dt = \frac{3x}{2} [F(t)]_0^x \\ = \frac{3x}{2} F(x) - \frac{3x}{2} F(0)$$

Si F est la primitive qui s'annule en 0, F est donc solution de l'équation :

$$F' = \frac{3x}{2} F, \text{ qui a pour solutions les fonctions } F(x) = \lambda e^{\frac{3x^2}{4}} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Comme } F(0) = 0 : \lambda = 0 !!$$

Ainsi,

$F=0$ est une primitive de f . Donc $f=0$

4) Soit $y: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et $z = y^2$.
 z est encore dérivable, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x) = y'(x) \times 2y(x) = 2y y'(x).$$

$$\text{Ainsi : } y \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xyy' = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + z + xz' = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z' + \frac{1}{x}z = -x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

On note (E') : $z' + \frac{1}{x}z = -x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

L'équation homogène associée des (E') : $z' + \frac{1}{x}z = 0$, dont les solutions sont les $\tilde{z}_h(x) = \lambda e^{-\ln(x)} = \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière sous la forme $\tilde{z}_p(x) = \frac{\lambda(x)}{x}$ avec $\lambda: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

On a alors $\forall x > 0, \quad \tilde{z}_p'(x) = \frac{\lambda'(x)x - \lambda(x)}{x^2}$, donc on doit avoir :

$$\frac{\lambda'(x)x - \lambda(x)}{x^2} + \frac{\lambda(x)}{x^2} = -x, \text{ i.e. } \frac{\lambda'(x)}{x} = -x, \text{ donc } \lambda'(x) = -x^2$$

La fonction $\lambda(x) = -\frac{x^3}{3}$ convient. Donc une solution particulière de (E') est

$$z_p(x) = \frac{-x^3}{3x} = -\frac{x^2}{3}$$

Enfin, les solutions de (E') sont les $\boxed{z(x) = \frac{\lambda}{x} - \frac{x^2}{3}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. $z(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$,
donc z n'est pas positive : il n'existe pas de fonction y telle que $y^2 = z \dots$
(E) n'a aucune solution !

12 1. $g = \ln(f)$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et on a $\forall t \geq 0, g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$.

D'où: f est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall t \geq 0, f'(t) = -\frac{1}{20} f(t) (3 - \ln(f(t)))$

$$\Leftrightarrow \forall t \geq 0, \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{1}{20} (3 - \ln(f(t)))$$

$$\Leftrightarrow \forall t \geq 0, g'(t) = -\frac{1}{20} (3 - g(t))$$

$$\Leftrightarrow \forall t \geq 0, g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}$$

2. On a (H) linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Ses solutions sont les fonctions de la forme $g(t) = \lambda e^{t/20} + \frac{-3/20}{-1/20} = 3 + \lambda e^{t/20}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. f vérifie (E) donc g vérifie (H). Ainsi: $\exists C \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0, g(t) = 3 + C e^{t/20}$.

D'où: $\forall t \geq 0, \ln(f(t)) = 3 + C e^{t/20}$.

En passant à l'exponentielle, on a bien: $\exists C \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0, f(t) = \exp(3 + C e^{t/20})$.

4. On a $f(0) = 1 = \exp(3 + C e^0) = \exp(3 + C)$.

Ainsi, $C = \ln(1) - 3 = -3$.

5. On a: $\forall t \geq 0, f(t) = \exp(3 - 3e^{t/20}) > 0$, et

$$f'(t) = -\frac{1}{20} f(t) (3 - g(t))$$

$$= -\frac{f(t)}{20} (3 e^{t/20}) < 0 \text{ puisque } f(t) > 0, \frac{3 e^{t/20}}{20} > 0 \text{ et } -1 < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, positive, et de plus:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (3 - 3e^{t/20}) = -\infty \text{ donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0.$$

t	0	$+\infty$
$f(t)$	1	0

$$6. f(t) \leq 0,02 \Leftrightarrow 3 - 3e^{t/20} \leq \ln\left(\frac{2}{100}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{t/20} \geq 1 - \frac{1}{3} \ln\left(\frac{2}{100}\right)$$

$$\Leftrightarrow t \geq 20 \ln\left(1 - \frac{1}{3} \ln\left(\frac{2}{100}\right)\right) \rightarrow \text{Application Numérique à faire.}$$

13 1. Soit α le coefficient de proportionnalité qui relie la variation de la température ($T'(t)$) et la différence de température entre le corps chaud ($T(t)$) et la pièce (T_{air}).

On a alors: $\forall t \geq 0, T'(t) = \alpha(T_{\text{air}} - T(t))$, soit:

$$(E): T'(t) + \alpha T(t) = \alpha T_{\text{air}}$$

2. Les solutions de (E), qui est d'ordre 1 à coefficients constants, sont les fonctions $T(t) = \lambda e^{-\alpha t} + \frac{\alpha T_{\text{air}}}{\alpha} = T_{\text{air}} + \lambda e^{-\alpha t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ici, on a $T(0) = 9T_{\text{air}} = T_{\text{air}} + \lambda e^0 = T_{\text{air}} + \lambda$,

donc $\lambda = 9T_{\text{air}} - T_{\text{air}} = 8T_{\text{air}}$.

On résout l'équation $T(t) = \frac{T(0)}{2} : \forall t \geq 0$,

$$T(t) = \frac{T(0)}{2} \Leftrightarrow T_{\text{air}} + 8T_{\text{air}} e^{-\alpha t} = \frac{9}{2} T_{\text{air}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 8e^{-\alpha t} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow e^{-\alpha t} = \frac{7}{16} \Leftrightarrow -\alpha t = \ln\left(\frac{7}{16}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{16}{7}\right)}{\alpha}$$

Enfin, on a $\alpha > 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\alpha t} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, et ainsi $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = T_{\text{air}}$.

La température converge vers la température ambiante de la pièce quand $t \rightarrow +\infty$.

14 1. On a $\forall t \in \mathbb{R}^+, C_c(t) + C_s(t) = C_c(0) + C_s(0) = 0 + C_0$.

D'où: $\forall t \in \mathbb{R}^+, C_c(t) = C_0 - C_s(t)$

2. Ainsi: $\forall t \geq 0, C_s'(t) = \rho(C_0 - C_s(t) - C_s(t)) = \rho C_0 - 2\rho C_s(t)$

et donc $\forall t \geq 0, C_s' + 2\rho C_s = \rho C_0$.

3. "ordre 1, coeffs constants". On a donc $\forall t \geq 0, C_s(t) = \lambda e^{-2\rho t} + \frac{\rho C_0}{2\rho} = \frac{C_0}{2} + \lambda e^{-2\rho t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Or $C_s(0) = C_0 = \frac{C_0}{2} + \lambda e^0 = \frac{C_0}{2} + \lambda$, donc $\lambda = C_0 - \frac{C_0}{2} = \frac{C_0}{2}$. D'où:

$$\forall t \geq 0, C_s(t) = \frac{C_0}{2} + \frac{C_0}{2} e^{-2\rho t} = \frac{C_0}{2} (1 + e^{-2\rho t})$$

Et donc $C_c(t) = C_0 - \frac{C_0}{2} (1 + e^{-2\rho t}) = \frac{C_0}{2} (1 - e^{-2\rho t})$

4. On résout: $C_s(t) = 2C_c(t) \Leftrightarrow 1 + e^{-2\rho t} = 2 - 2e^{-2\rho t} \Leftrightarrow 3e^{-2\rho t} = 1$

$$\Leftrightarrow -2\rho t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(3)}{2\rho}$$

16 1. On a une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants et homogène.
les solutions sont de la forme $C(t) = \alpha e^{-\lambda t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Or on sait que $C(0) = C_0 = 10^{-12}$, donc $\alpha = 10^{-12}$. Ainsi:

$$\forall t \geq 0, \quad C(t) = 10^{-12} e^{-\lambda t}$$

2. On résout: $C(t) = \frac{C(0)}{2} \Leftrightarrow 10^{-12} e^{-\lambda t} = \frac{10^{-12}}{2}$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda t = -\ln(2) \\ \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Ainsi: $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$

3. On a $\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} \approx \frac{\ln(2)}{5730}$

On résout alors: $C(t) = 8 \times 10^{-13} \Leftrightarrow 10^{-12} e^{-\lambda t} = 8 \times 10^{-13}$
 $\Leftrightarrow -\lambda t = \ln(0,8) = \ln\left(\frac{4}{5}\right) = -\ln\left(\frac{5}{4}\right)$
 $\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{\lambda} = \frac{\ln\left(\frac{5}{4}\right) \times 5730}{\ln(2)}$

Application numérique:

$t \approx 1845$ ans environ.

II - Ordre 2 à coefficients constants

5 a) $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

c) $y(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

e) $y(x) = e^{ax} \left(\lambda \cos(\sqrt{5}x) + \mu \sin(\sqrt{5}x) \right)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

f) $\rightarrow$ si $a > 1$, on a $y(x) = \lambda e^{(1+\sqrt{a-1})x} + \mu e^{(1-\sqrt{a-1})x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ si $a = 1$, on a $y(x) = (\lambda + \mu x) e^x$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ si $a < 1$, on a $y(x) = e^x \left(\lambda \cos(x\sqrt{1-a}) + \mu \sin(x\sqrt{1-a}) \right)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

6 $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{2}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Or

$y(0) = \lambda + \mu = \frac{2-5}{2}$ et $y'(0) = 2\lambda + \mu = 2$. D'où $\lambda = 2$ et $\mu = \frac{25}{2}$

$y(x) = 2e^{2x} + \frac{25}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{2}$

7 1. a) $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^x + (-x e^x)$ (on a cherché $y_p(x) = a x e^x$)
 b) $y(x) = (1 + \mu x) e^{2x} + (x + 2) e^x$ (on a cherché $y_p(x) = (a x + b) e^x$)
 c) $y(x) = e^x (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x + \frac{1}{2}$ (on a cherché $y_p(x) = a x^2 + b x + c$)

2. $y_H(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \right)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

avec $y_p(x) = (a x + b) \cos x + (c x + d) \sin x$, on a

$$y_p'(x) = a \cos x - (a x + b) \sin x + c \sin x + (c x + d) \cos x$$

$$= (c x + d + a) \cos x + (-a x + c - b) \sin x$$

$$y_p''(x) = \frac{1}{2} c \cos x - (c x + d + a) \sin x - a \sin x + (-a x + c - b) \cos x$$

$$= (-a x + 2c - b) \cos x + (-c x - 2a - d) \sin x$$

D'où $y_p''(x) + y_p'(x) + y_p(x) = (c x + 2c + d + a) \cos x + (-a x - 2a + c - b) \sin x$

On cherche donc $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ qui vérifient (S) $\begin{cases} c = 1 \\ 2c + d + a = 0 \\ -a = 0 \\ -2a + c - b = 0 \end{cases}$

On a (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = 0 \\ d = -2c - a = -2 \\ b = -2a + c = 1 \end{cases}$

Donc $y_p(x) = \cos(x) + (-2x + 1) \sin(x)$ convient

D'où : les solutions de l'équation sont les fonctions

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \right) + \cos x + (1 - 2x) \sin x$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

8 On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $x''(t) = 4x'(t) - 3y'(t) = 10x(t) - 9y(t) = 10x(t) + 3(x'(t) - 4x(t))$
 $= 3x'(t) - 2x(t)$.

Soit (E) : $x'' - 3x' + 2x = 0$: les solutions sont de la forme

$$x(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t}, \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Puis $y(t) = \frac{1}{3}(4x(t) - x'(t)) = \frac{1}{3}(4\lambda e^t + 4\mu e^{2t} - \lambda e^t - 2\mu e^{2t})$

$$= \lambda e^t + \frac{2\mu}{3} e^{2t} \text{ pour la même valeur de } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

9 La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie

l'équation : $F'' + 2F' + F = x$. On a donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = (\lambda + \mu x) e^{-x} + x - 2$ (on a cherché $y_p(x)$ sous la forme $y_p(x) = a x + b$)

Or $F(0) = 0$, donc $\lambda - 2 = 0$: $\lambda = 2$. Ainsi, F est de la forme $F(x) = (2 + \mu x) e^{-x} + x - 2$
 avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Donc $f = F$ est de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \mu e^{-x} + (2 + \mu)x(-e^{-x}) + 1 = (\mu - 2 - \mu x)e^{-x} + 1 \quad \text{avec } \mu \in \mathbb{R}$$

10 Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$.

Alors f est encore dérivable, et $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -f'(-x) = -f(-(-x)) = -f(x)$.

f est solution de $f'' + f = 0$, donc f est de la forme :

$$f(x) = e^{0x}(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Posons $f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors f est dérivable, et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\lambda \sin x + \mu \cos x$.

$$\text{Or } f(-x) = \lambda \cos x - \mu \sin x.$$

Donc f convient si et seulement si $\lambda = \mu$. Ainsi, les solutions sont les fonctions de la forme : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda(\cos x + \sin x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

11 1. z est définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(e^t)$. Par composition, z est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a : $\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) = e^t y'(e^t)$

$$z''(t) = e^t y''(e^t) + e^t e^t y'(e^t)$$

D'où : y est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+, x^2 y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = 4x^2$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \underbrace{e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t)}_{z''(t)} - 4y(e^t) = 4e^{2t}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) - 4z(t) = 4e^{2t}$$

$\Leftrightarrow z$ est solution de (E'), où

$$(E') : z'' - 4z = 4e^{2t}$$

2. Les solutions de (E') sont les $z(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t} + t e^{2t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(on a cherché y_p sous la forme $y_p(t) = a t e^{2t}$).

On en déduit que $y(x) = z(\ln(x)) = \lambda e^{2\ln x} + \mu e^{-2\ln x} + \ln(x) e^{2\ln x}$

$$= \lambda x^2 + \frac{\mu}{x^2} + \ln(x) x^2 \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

12 $\theta(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$ où $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

$\theta(0) = \theta_0 = \lambda$ et $\theta'(0) = \omega \mu = 0$, donc $\lambda = \theta_0$ et $\mu = 0$. D'où :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

