

TD Ch6 - Σ & Π - Corrigé

1

1 a) 10 b) 2 c) $(n+1)n(n-1)(n-2)$ d) $(n+1)n(n-1) + n = n^3$

e) 126 f) $\binom{14}{2} = 91$ g) $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ h) $\binom{20}{17} = \binom{20}{3} = 1140$ i) $\binom{100}{98} = \binom{100}{2} = 4950$

2 a) $\frac{50 \times 51}{2} = 1275$ b) $\sum_{k=0}^{100} k - \sum_{k=0}^9 k = \frac{100 \times 101}{2} - \frac{9 \times 10}{2} = 5050 - 45 = 5005$

ⓐ $\sum_{j=0}^{90} (j+10) = \sum_{j=0}^{90} j + 91 \times 10 = \frac{90 \times 91}{2} + 910 = 5005$

c) $\left(\sum_{k=1}^{100} k \right)^2 - 1 = \frac{100 \times 101 \times 201}{6} - 1 = 338349$ d) $\left(\frac{2^n(2^n+1)}{2} \right)^2$ e) $x \sum_{k=0}^n (k^2)^k = \begin{cases} x \times \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2} \\ \text{si } x^2 \neq 1 \end{cases}$

f) $t \sum_{k=0}^n \left(\frac{8a}{t} \right)^k = t \times \frac{1 - \left(\frac{8a}{t} \right)^{n+1}}{1 - \frac{8a}{t}}$ g) $\sum_{i=0}^n i^2 + \sum_{i=0}^n (n+3) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+3)(n+1)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } x^2 = 1 \end{array} \right.$

h) $3 \sum_{i=1}^n 2^i + \sum_{i=1}^n 1 = 3 \times (2^{n+1} - 2) + n$ i) Méthode 1:

i) Méthode 1: $(2k-1)^3 = 8k^3 - 12k^2 + 6k - 1$ donc $\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = 8 \sum_{k=1}^n k^3 - 12 \sum_{k=1}^n k^2 + 6 \sum_{k=1}^n k - n$

donc $\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = 2n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) - n$
 $= n(n+1)(2n^2 + 2n - 4n - 2 + 3) - n = n(n+1)(2n^2 - 2n + 1) - n$

Méthode 2: $\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = \sum_{\substack{1 \leq j \leq 2n \\ j \text{ impair}}} j^3 = \sum_{j=1}^{2n} j^3 - \sum_{\substack{1 \leq j \leq 2n \\ j \text{ pair}}} j^3 = \sum_{j=1}^{2n} j^3 - \sum_{k=1}^n (2k)^3$
 $= \left(\frac{2n(2n+1)}{2} \right)^2 - 8 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = n^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2$
 $= n^2((2n+1)^2 - 2(n+1)^2)$

j) $\sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{1}{n}})^k = \frac{1 - e^{\frac{n}{n}}}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$

k) $2 \sum_{k=0}^{n^2} k - (n^2+1) + \sum_{k=0}^{n^2} 2^k = n^2(n^2+1) - (n^2+1) + \frac{1-2^{n^2+1}}{1-2} = n^4 - 1 + 2^{n^2+1} - 1 = n^4 + 2^{n^2+1} - 2$

l) $(1+a)^n$ m) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k + \binom{n}{n+1} 2^{n+1} - \binom{n}{0} 2^0 - \binom{n}{1} 2^1 = (1+2)^n + 0 - 1 - 2n = 3^n - 2n - 1$

n) $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^i = \binom{n+1}{0} (-1)^0 - \binom{n+1}{n+1} (-1)^{n+1} = 0 - 1 \cdot (-1)^{n+1} = (-1)^n - 1$

o) $-\frac{1}{2^2} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(-\frac{1}{2} \right)^j = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right)^n = -\frac{1}{2^{n+1}}$ p) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3} \right)^k - \binom{n}{n} \left(\frac{1}{3} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{3} \right)^n - \frac{1}{3^n} = \frac{4^n - 1}{3^n}$

3) Rappel: $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ "Rue du chef" ou "Formule du capitaine"

$$1) \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n \times 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k} = \sum_{k=2}^n n(k-1) \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} = n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} = n(n-1) 2^{n-2}$$

$$2) \sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} - \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$$

$$\text{D'où } \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n(n-1) 2^{n-2} + n 2^{n-1} = n 2^{n-2} (n-1+2) = n(n+1) 2^{n-2}$$

$$3) \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} \binom{n}{j} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k}$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1 + 1) = \frac{1}{n+1} (2^{n+1})$$

$$4) \sum_{j=1}^n \ln\left(\frac{j}{2}\right) = \ln\left(\prod_{j=1}^n \frac{j}{2}\right) = \ln\left(\frac{\prod_{j=1}^n j}{\prod_{j=1}^n 2}\right) = \ln\left(\frac{n!}{2^n}\right) = \ln(n!) - n \ln(2)$$

$$5) 1) \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^n x_{i+1} - \sum_{i=0}^n x_i = \sum_{j=1}^{n+1} x_j - \sum_{j=0}^n x_j = x_{n+1} + \cancel{\sum_{j=1}^n x_j} - \cancel{\sum_{j=1}^n x_j} - x_0$$

$$= x_{n+1} - x_0$$

$$\sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n x_{i+1} - \sum_{i=1}^n x_{i-1} = \sum_{j=2}^{n+1} x_j - \sum_{j=0}^{n-1} x_j = x_{n+1} + x_n - x_1 - x_0$$

$$2) \sum_{k=3}^n \ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-2)}\right) = \sum_{k=3}^n (\ln(k) + \ln(k) - \ln(k+1) - \ln(k-2))$$

$$= \sum_{k=3}^n [\ln(k) - \ln(k+1)] + \sum_{k=3}^n [\ln(k) - \ln(k-2)]$$

$$= - \sum_{k=3}^n [\ln(k+1) - \ln(k)] + \sum_{i=2}^{n-1} [\ln(i+1) - \ln(i-1)]$$

$$= - [\ln(n+1) - \ln(3)] + [\ln(n) + \ln(n-1) - \ln(2) - \ln(1)]$$

$$= \ln(3) - \ln(n+1) + \ln(n) + \ln(n-1) - \ln(2) - 0$$

$$= \ln(n+1) + \ln(n) + \ln(n-1) + \ln(3) - \ln(2)$$

On obtient donc :
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{1+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{n+1-n-2}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

~~5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose P_n la propriété : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$~~

$$= \frac{(n+1)(n+2) - 2}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 3n + 2 - 2}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose P_n la propriété : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

① - $n=1$: la somme vaut $\frac{1}{1(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}$

d'autre part : $\frac{1 \times (1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{4}{4 \times 2 \times 3} = \frac{1}{6}$. D'où l'égalité : P_1 est vraie.

② Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n est vraie. Alors on a

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)(n+1+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n(n+3)(n+3) + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n(n^2 + 6n + 9) + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

d'autre part : $\frac{(n+1)(n+1+3)}{4(n+1+1)(n+1+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)} = \frac{(n^2 + 5n + 4)}{4(n+2)(n+3)} \times \frac{(n+1)}{(n+1)}$

$$= \frac{n^3 + 5n^2 + 4n + n^2 + 5n + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

On a bien égalité, d'où P_{n+1} et donc l'hérédité.

On a bien montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ P_n est vraie.

3) a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+3} = \frac{a(k+1)(k+3) + b(k-1)(k+3) + c(k-1)(k+1)}{k(k+1)(k+3)}$$

$$= \frac{a(k^2+4k+3) + b(k^2+2k-3) + c(k^2-1)}{k(k+1)(k+3)}$$

$$= \frac{k^2(a+b+c) + k(4a+2b) + (3a-3b-c)}{k(k+1)(k+3)}$$

On cherche donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b=1 \\ 3a-3b-c=-1 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} a=-b-c \\ -2b-4c=1 \\ -6b-4c=-1 \end{cases}$$

i.e. $\begin{cases} a=-b-c \\ b=-2c-\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{4}-\frac{3b}{2}=\frac{1}{4}+3c+\frac{3}{4} \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} a=0 \\ b=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \\ c=-\frac{1}{2} \end{cases}$ $a=0 \quad b=\frac{1}{2} \quad c=-\frac{1}{2}$.

Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a $\boxed{\frac{k-1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right)}$

b) On en déduit : $\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{n+2} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j+1} \right)$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] = \boxed{\frac{1}{2} \left(\frac{7}{12} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} \right)}$$

4) On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tq $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$

$$= \frac{a(k+1)(k+2) + b k(k+2) + c k(k+1)}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a(k^2+3k+2) + b(k^2+2k) + c(k^2+k)}{k(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k^2(a+b+c) + k(3a+2b+c) + 2a}{k(k+1)(k+2)}$$

On résout par identification le système :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+b=0 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

ainsi : $a=\frac{1}{2}$, $b=-2a=-1$ et $c=-a-b=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$. On a donc :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right)}$

6 1. On a une somme géométrique: $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme somme de fonctions qui le sont.
Avec la 1^{ère} expression de f : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) = \sum_{k=0}^n k x^{k-1}$

Avec la 2^{ème} expression de f : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (-1)(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$

$$= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

3) On a $\sum_{k=0}^n k x^k = x \sum_{k=0}^n k x^{k-1}$

$$= x f'(x) = x \times \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1-x^{n+1}}{(x-1)^2} + \frac{nx^n}{x-1}$$

4) En dérivant à nouveau, on obtient $f''(x) = \sum_{k=2}^n k(k-1)x^{k-2}$

$$\text{et } f''(x) = \frac{[n(n+1)x^n - n(n+1)x^{n-1}](1-x)^2 + 2(1-x)[nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1]}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{n(n+1)x^{n-1}(x-1)(1-x) + 2nx^{n+1} - 2(n+1)x^n + 2}{(1-x)^3}$$

$$= \frac{n(n+1)x^{n-1}}{x-1} + \frac{2nx^n(x-1)}{(x-1)^3} + \frac{2(x^n-1)}{(1-x)^3}$$

D'où

$$\sum_{k=2}^n k(k-1)x^{k-2} = \frac{n(n+1)x^{n-1}}{x-1} + \frac{2nx^n}{(x-1)^2} + \frac{2(x^n-1)}{(x-1)^3}$$

5) Ainsi, $\sum_{k=0}^n k^2 x^k = \sum_{k=2}^n k(k-1)x^{k-2} + \sum_{k=2}^n k x^{k-2} + 0x + 1^2 x^0$

$$= \frac{n(n+1)x^{n-1}}{x-1} - \frac{2nx^n}{(x-1)^2} + \frac{2(x^n-1)}{(x-1)^3} + \frac{1}{x} \frac{1-x^n}{(x-1)^2} + \frac{nx^{n-1}}{x-1} + \frac{1}{x^2}$$

D'où $\sum_{k=0}^n k^2 x^k = \frac{n(n+1)x^{n+1}}{x-1} - \frac{2nx^{n+2}}{(x-1)^2} + \frac{2x^2(x^n-1)}{(x-1)^3} + \frac{x(1-x^n)}{(x-1)^2} + \frac{nx^{n+1}}{x-1} + 1$ ooo

7 On a
$$\begin{cases} S+T = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} = 2^{2n} \\ S-T = \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j} = (1-1)^{2n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n=0 \end{cases} \end{cases}$$

Ainsi, en additionnant les 2 égalités :

$\forall n \geq 1 \quad 2S = 2^{2n} + 0$ donc $S = 2^{2n-1}$

et en soustrayant : $\forall n \geq 1, \quad 2T = 2^{2n} - 0$ donc $T = 2^{2n-1}$

Et pour $n=0$: $S+T=1$ $S-T=1$ donc $\begin{cases} 2S=2 \\ 2T=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} S=1 \\ T=0 \end{cases}$ (on pourrait aussi calculer directement)

8 a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta})^k\right)$

$= \operatorname{Re}\left((1+e^{i\theta})^n\right)$

Or $1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2} \left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2} \right)$
 $= 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$
 $= 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Donc $(1+e^{i\theta})^n = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{in\frac{\theta}{2}}$ et ainsi $\operatorname{Re}\left((1+e^{i\theta})^n\right) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$

D'où $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$

b) De même, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) = \operatorname{Im}\left((1+e^{i\theta})^n\right) = \operatorname{Im}\left(2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{in\frac{\theta}{2}}\right)$
 $= 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$

9 c) $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k\right)$

Or $\sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k = \begin{cases} \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} & \text{si } e^{i\theta} \neq 1 \\ n+1 & \text{si } e^{i\theta} = 1 \end{cases}$

D'où, si $e^{i\theta} = 1$ (si $\theta \equiv 0 [2\pi]$): $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \operatorname{Re}(n+1) = n+1$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \operatorname{Im}(n+1) = 0$

Si $\theta \neq 0 [2\pi]$, on a $\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} \times 2i \sin\left(-\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2i \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{e^{in\theta} \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

D'où $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cos(n\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \sin(n\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

en prenant la partie réelle et la partie imaginaire.

9 a 11 Réurrences

12 a) $\prod_{i=p}^{n+p} (2i) = \prod_{i=p}^{n+p} 2 \prod_{i=p}^{n+p} i = 2^{n+1} \times \prod_{i=1}^{n+p} i \div \prod_{i=1}^{p-1} i = 2^{n+1} \frac{(n+p)!}{(p-1)!}$

b) $\prod_{j=1}^{n+1} j = (n+1)!$ $\Delta \neq \prod_{i=1}^{n+1} (i+1) = \prod_{j=2}^{n+1} j = \frac{(n+1)!}{1}$

c) $\prod_{k=1}^n \exp\left(\frac{k}{n}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k\right) = \exp\left(\frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2}\right) = e^{\frac{n+1}{2}}$

d) $\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{P}{Q}$ avec $P = \prod_{k=1}^n (2k)$ et $Q = \prod_{k=1}^n (2k+1)$.

$P = \prod_{k=1}^n 2 \prod_{k=1}^n k = 2^n n!$ $Q = \frac{\prod_{j=1}^{2n} j}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq 2n \\ i \text{ pair}}} i} = \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$

Donc $\frac{P}{Q} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}$

e) $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=1}^n (k-1) \prod_{k=1}^n (k+1)}{\left(\prod_{k=1}^n k\right)^2}$

$= 0$ car $1 \cdot \frac{1}{1^2} = 1 \cdot 1 = 0$.

! Mais $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} j \times \prod_{j=3}^{n+1} j}{\prod_{j=2}^n j \prod_{j=2}^n j} = \frac{1 \times (n+1)}{n \times 2} = \frac{n+1}{2n}$

$$f) \prod_{i=1}^n (4i-2) = 2^n \prod_{i=1}^n (i-1) = 2^n \prod_{k=0}^{n-1} k = 0 \text{ car } k=0 \text{ donne } 0.$$

$$\text{Mais } \prod_{i=2}^n (4i-2) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} k = 2^{n-1} (n-1)!$$

$$g) \frac{\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}}{\prod_{k=0}^{p-1} \frac{p-k}{p-k}} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (n-k)}{\prod_{k=0}^{p-1} (p-k)} = \frac{\prod_{j=p-p+1}^n j}{\prod_{j=1}^p j} = \frac{n! \div (n-p)!}{p!} = \frac{n!}{p! (n-p)!}$$

$$= \binom{n}{p}$$

$$13) a) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n i = \sum_{i=0}^n i \times (n+1) = (n+1) \sum_{i=0}^n i = (n+1) \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

$$b) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i i = \sum_{i=0}^n i \times (i+1) = \sum_{i=0}^n i^2 + \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+2)}{2} = \frac{n(n+1)(n+1)}{1} = \frac{n(n+1)(n+1)}{1}$$

$$c) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i j = \sum_{i=0}^n \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^n i^2 + \sum_{i=0}^n i \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \text{ d'après la question précédente.}$$

$$d) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i j^2 = \sum_{i=0}^n \frac{i(i+1)(2i+1)}{6} = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^n (2i^3 + 3i^2 + i) = \frac{1}{6} \left(2 \sum_{i=0}^n i^3 + 3 \sum_{i=0}^n i^2 + \sum_{i=0}^n i \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)(n^2+3n+2)}{12} = \frac{n(n+1)(n+1)(n+2)}{12} = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$$

$$e) \sum_{k=0}^n \left(k \times \sum_{l=0}^m (2^l + 1) \right) = \sum_{k=0}^n k \times \left(\frac{1-2^{m+1}}{1-2} + m+1 \right) = \sum_{k=0}^n k \times (2^{m+1} + m) = (2^{m+1} + m) \times \sum_{k=0}^n k = \frac{(2^{m+1} + m) n(n+1)}{2}$$

$$f) \sum_{k=0}^{2n} k \left(\sum_{i=k}^{k+2} i^2 \right) = \sum_{k=0}^{2n} k \times (k^2 + (k+1)^2 + (k+2)^2) = \sum_{k=0}^{2n} k (k^2 + k^2 + 2k + 1 + k^2 + 4k + 4) = \sum_{k=0}^{2n} k (3k^2 + 6k + 5) = 3 \sum_{k=0}^{2n} k^3 + 6 \sum_{k=0}^{2n} k^2 + 5 \sum_{k=0}^{2n} k = 3 \left(\frac{2n(2n+1)}{2} \right)^2 + 6 \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{2} + 5 \frac{2n(2n+1)}{2} = \frac{2n(2n+1)}{2} (3n(2n+1) + 2(4n+1) + 5) = n(2n+1) (12n^2 + 14n + 7)$$

g) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} = \sum_{j=1}^n (2^j - \binom{j}{0})$ 9

$$= \sum_{j=1}^n (2^j - 1) = \sum_{j=1}^n 2^j - \sum_{j=1}^n 1 = \frac{2-2^{n+1}}{1-2} - n = 2^{n+1} - 2 - n$$

h) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} (j-i) = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^{j-1} j - \sum_{i=1}^{j-1} i \right] = \sum_{j=1}^n \left(j(j-1) - \frac{(j-1)(j)}{2} \right)$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{j(j-1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j^2 - j) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{j=1}^n j \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= \frac{n(n+1)}{4} \left(\frac{2n+1}{3} - 1 \right) = \frac{n(n+1)}{4} \times \frac{2n-2}{3} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}$$

i) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \min(i, j) + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \min(i, j)$

$$= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i + \sum_{1 \leq j < i \leq n} j - \sum_{1 \leq i=j \leq n} i$$

$\downarrow$ question c $\downarrow$ question c $\downarrow$ formule du cours

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6} (2(n+2) - 3) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

j) $\prod_{1 \leq i, j \leq n} i^j = \prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n i^j \right) = \prod_{i=1}^n \left(i^{\sum_{j=1}^n j} \right) = \prod_{i=1}^n \left(i^{\frac{n(n+1)}{2}} \right) = \left(\prod_{i=1}^n i \right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = (n!)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

k) $\prod_{1 \leq i, j \leq n} 2^{i+j} = 2^{\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)}$

Or $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n i + \sum_{j=1}^n j \right) = \sum_{i=1}^n \left(ni + \frac{n(n+1)}{2} \right) = n \sum_{i=1}^n i + n \times \frac{n(n+1)}{2}$

$$= n \times \frac{n(n+1)}{2} + n \times \frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1)$$

D'où $\prod_{1 \leq i, j \leq n} 2^{i+j} = 2^{n^2(n+1)}$

14 1) Soit $k \in \mathbb{N}$. $(k+1)! - k! = k! \times (k+1) - k! = k! \cdot (k+1 - 1) = k! \times k$

2) $\sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n k! = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} k! = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^k k! \right) = \sum_{k=1}^n k \times k!$

$= \sum_{k=1}^n ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$

↳ télescopage.

15 1) Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$x \mapsto x + \frac{1}{x}$

opérations, et on a: $\forall x > 0$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

où $\frac{x+1}{x^2} > 0 \forall x > 0$. Donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $x-1$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f			$\nearrow 2$

Or $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$.

Donc: $\forall x > 0$, $f(x) \geq 2$, puisque le minimum de f vaut 2.

On a bien montré: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x + \frac{1}{x} \geq 2$.

2) $A = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \right) = \sum_{i=1}^n \left(a_i \times \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_i \times \frac{1}{a_j} \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{a_i}{a_j}$

3) $A = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{a_i}{a_j} + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{a_i}{a_j} - \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{a_j}{a_j} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{a_i}{a_j} + n - \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{a_j}{a_j}$

$= n + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \right)$

4) $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a: $\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} = x + \frac{1}{x}$ avec $x = \frac{a_i}{a_j} > 0$. D'où: $\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \geq 2$.

Ainsi: $A \geq n + \sum_{1 \leq i, j \leq n} 2 = n + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} = n + n(n-1) = n^2$

On a égalité si et seulement si tous les $\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}$ valent 2, i.e. lorsque

$\forall 1 \leq i, j \leq n$, $\frac{a_i}{a_j} = 1$ (par stricté du minimum de f), c'est-à-dire si et seulement si

tous les (a_i) sont égaux !

Exos type DS

11

16 1) $\frac{1}{\omega} = \frac{1}{e^{\frac{2i\pi}{7}}} = e^{-\frac{2i\pi}{7}} = \overline{e^{\frac{2i\pi}{7}}} = \overline{\omega}$ (puisque $|\omega|=1$...) $\frac{1}{\omega} = \overline{\omega}$

2) Soit $k \in [0, 7]$. On a : $\overline{\omega}^{7-k} = \left(\frac{1}{\omega}\right)^{7-k} = \frac{1}{\omega^{7-k}} = \frac{\omega^k}{\omega^7}$.

Or $\omega^7 = \left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)^7 = e^{7 \times \frac{2i\pi}{7}} = e^{2i\pi} = 1$, donc $\overline{\omega}^{7-k} = \frac{\omega^k}{1} = \omega^k$.

D'où : $\forall k \in [0, 7], \omega^k = \overline{\omega}^{7-k}$

3) On a alors $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6 = \overline{\omega}^{7-3} + \overline{\omega}^{7-5} + \overline{\omega}^{7-6} = \overline{\omega}^4 + \overline{\omega}^2 + \overline{\omega} = \overline{\omega^4 + \omega^2 + \omega} = \overline{A}$. On a donc bien $\overline{A} = B$.

4) $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$ et sinus est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) < \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$. D'où : $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$.

5) $\text{Im}(A) = \text{Im}\left(e^{\frac{2i\pi}{7}} + e^{\frac{4i\pi}{7}} + e^{\frac{8i\pi}{7}}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.

Or : $\left\{ \begin{array}{l} \frac{8\pi}{7} = \pi + \frac{\pi}{7} \text{ donc } \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \\ \frac{4\pi}{7} \in]0, \pi[\text{ donc } \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > 0 \end{array} \right.$

D'où : $\text{Im}(A) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > 0$

6) Pour tout Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose P_n la propriété : " $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ". Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que P_n est vraie pour tout n .

Ⓘ - Pour $n=0$, on a $\sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = 1$, et $\frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1$. P_0 est donc bien vraie.

Ⓜ - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie. Montrons P_{n+1} . On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \end{aligned}$$

P_{n+1} est bien vraie. D'où l'hérédité et la récurrence.

7) D'après la question précédente, comme $\omega \neq 1$ ($\frac{2\pi}{7} \neq 0 [2\pi]$), on a

$$\sum_{k=0}^6 \omega^k = \frac{1-\omega^{6+1}}{1-\omega} = \frac{1-\omega^7}{1-\omega} = \frac{1-1}{1-\omega} = 0 \text{ puisque } \omega^7 = 1.$$

8) $A+B = \omega + \omega^2 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^5 + \omega^6 = \sum_{k=1}^6 \omega^k = \sum_{k=0}^6 \omega^k - \omega^0 = 0 - 1 = -1$

$$\begin{aligned} AB &= (\omega + \omega^2 + \omega^4)(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) = \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10} \\ &= \omega^4 + \omega^6 + 1 + \omega^5 + 1 + \omega^{7+1} + 1 + \omega^{7+2} + \omega^{7+3} \\ &= 3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^5 + \omega + \omega^2 + \omega^3 \\ &= 3 + A+B = 3 + (-1) = 2. \end{aligned}$$

D'où $A+B = -1$ et $AB = 2$

9) A et B sont les deux racines du polynôme

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-A)(x-B) = x^2 - Ax - Bx + AB = x^2 - (A+B)x + AB \\ &= x^2 - (-1)x + 2 = x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

10) Le discriminant de ce trinôme vaut : $\Delta = 1^2 - 8 = -7 < 0$, donc ses racines sont données par $z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

Or $\text{Im}(A) > 0$, donc on a nécessairement

$$A = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

17) 1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la propriété : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

①. $\sum_{k=1}^0 k^2 = 0$ puisque c'est la somme vide, et $\frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6} = 0$, donc P_0 est vraie.

②. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)}{6} (2n^2 + n + 6n + 6) = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$\text{Or } \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{n+1}{6} (2n^2 + 3n + 4n + 6) = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \quad \text{On a bien égalité, donc}$$

P_{n+1} est encore vraie.

Ainsi, (P_n) est initialisée à $n=0$ et est héréditaire, donc par principe de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2) $\sum_{j=i+1}^n j = \sum_{k=1}^{n-i} (k+i)$ en posant $j=k+i$

$$= \sum_{k=1}^{n-i} k + \sum_{k=1}^{n-i} i = \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} + (n-i)i = \frac{n-i}{2} (n-i+1+2i)$$

$$= \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} = \frac{n^2 + n - i^2 - i}{2}$$

Autre méthode : $\sum_{j=i+1}^n j = \sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^i j = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} = \frac{n^2 + n - i^2 - i}{2}$

3) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \max(i, j) &= \sum_{j=1}^i \max(i, j) + \sum_{j=i+1}^n \max(i, j) \\ &= \sum_{j=1}^i i + \sum_{j=i+1}^n j \\ &= i \times i + \frac{n^2 + n - i^2 - i}{2} = \frac{n^2 + n - i^2 - i + 2i^2}{2} = \frac{n^2 + i^2 + n - i}{2} \end{aligned}$$

D'où, en sommant pour tous les $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j) = \sum_{i=1}^n \frac{n^2 + i^2 + n - i}{2}$$

4) On a donc $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j) = \left(\frac{n^2 + n}{2} \right) \times n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \times 6} - \frac{n(n+1)}{2 \times 2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6} \left(3n + \frac{2n+1}{2} - \frac{3}{2} \right)$$

$$= \frac{n(n+1)}{6} (3n + n - 1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

5) `range(a, b)` permet de parcourir l'ensemble des entiers entre a (inclus) et b (exclu).
Il s'agit donc de $\llbracket a, b-1 \rrbracket$

def somme_maxs(k):

 somme = 0

 for i in range(1, 1001):

 for j in range(1, 1001):

 somme += max(i*xk, j*xk)

 return somme

 ↑
 print, plutôt

18] Partie I - Quelques exemples

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. $b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. $b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^k 1^{n-k} = (e+1)^n$ d'après la formule du binôme.

3) a) Soient $1 \leq k \leq n$. On a : $k \binom{n}{k} = \frac{k n!}{k! (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!}$

Or $n \binom{n-1}{k-1} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-1-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!}$. D'où : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{0} \times 0$
 $= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = n \times 2^{n-1}$

c) En appliquant a) à $k+1$ et $n+1$, on a :

$\forall 0 \leq k \leq n$, $(k+1) \binom{n+1}{k+1} = (n+1) \binom{n}{k}$. D'où : $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$

Ainsi, dans le cas de $a_n = \frac{1}{n+1}$, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} = \frac{1}{n+1} \left(2^{n+1} - \binom{n+1}{0} \right)$
 $= \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)$

Partie II - Formule d'inversion

1) Soient $k, p, n \in \mathbb{N}$ avec $k \leq p \leq n$. On a :

$\binom{n+1}{p} \binom{p}{k} = \frac{(n+1)!}{p! (n+1-p)!} \times \frac{p!}{k! (p-k)!} = \frac{(n+1)!}{k! (n+1-p)! (p-k)!}$

$\binom{n+1}{k} \binom{n+1-k}{p-k} = \frac{(n+1)!}{k! (n+1-k)!} \times \frac{(n+1-k)!}{(p-k)! (n+1-k-p+k)!} = \frac{(n+1)!}{k! (p-k)! (n+1-p)!}$

On a bien l'égalité cherchée.

2) La formule du binôme appliquée à $n+1-k$, $a=-1$ et $b=1$ donne:

$$\sum_{i=0}^{n+1-k} \binom{n+1-k}{i} (-1)^i 1^{n+1-k-i} = (-1+1)^{n+1-k} = 0^{n+1-k} = \underline{0} \text{ car } n+1-k \geq 1.$$

D'où $\sum_{i=0}^{n+1-k} \binom{n+1-k}{i} (-1)^i = 0$. Ainsi:

$$\sum_{i=0}^{n+1-k} (-1)^i \binom{n+1-k}{i} = 0 - \binom{n+1-k}{n+1-k} (-1)^{n+1-k} = -1 \times (-1)^{n+1-k} = \underline{(-1)^{n-k}}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a:

$$\sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p \binom{n+1}{k} \binom{n+1-k}{p-k} (-1)^{p-k} b_k = \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p \binom{n+1}{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} b_k \quad (\text{d'après 1})$$

intervertir

$$= \sum_{0 \leq k \leq p \leq n} \binom{n+1}{k} \binom{p-k}{p-k} (-1)^{p-k} b_k = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b_k \sum_{p=k}^n (-1)^{p-k} \binom{n+1-k}{p-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b_k \times \sum_{p=k}^n (-1)^{p-k} \binom{n+1-k}{p-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b_k \times \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n+1-k}{i} \quad (\text{par le changement d'indice } i=p-k)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b_k (-1)^{n-k} \quad \text{d'après la question précédente.}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. $b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} a_k + \binom{n+1}{n+1} a_{n+1}$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} a_k + a_{n+1}$$

D'où: $a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} a_k$

5) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la propriété: " $a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$ "

On a $b_0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a_k = \binom{0}{0} a_0 = a_0$, et donc $\sum_{k=0}^0 (-1)^{0-k} \binom{0}{k} b_k = (-1)^{0-0} \binom{0}{0} b_0 = b_0 = a_0$

Donc P_0 est bien vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P_0, P_1, \dots, P_n$ sont toutes vraies. Montrons qu'alors P_{n+1} est encore vraie. On a:

$$a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p} a_p$$

$$= b_{n+1} - \sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p} \left(\sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} b_k \right) \quad \text{par hypothèse de récurrence forte.}$$

$$= b_{n+1} - \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p \binom{n+1}{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} b_k$$

$$= b_{n+1} - \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p \binom{n+1}{k} \binom{n+1-k}{p-k} (-1)^{p-k} b_k \quad \text{d'après la question 1.}$$

$$= b_{n+1} - \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k} b_k \quad \text{d'après la question 3}$$

$$= b_{n+1} + \sum_{k=0}^n (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} b_k = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} b_k$$

puisque $(-1)^{n+1-(n+1)} \binom{n+1}{n+1} b_{n+1} = 1 \times 1 \times b_{n+1} = b_{n+1}$.

P_{nn} est donc bien vraie. D'où l'hérédité et la récurrence.

6) D'après la question 3a) de la partie I, pour $a_n = n$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = n \times 2^{n-1}$. Ainsi, d'après la question précédente appliquée à ces valeurs de (a_n) et (b_n) , on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k \times 2^{k-1}$$

$$\text{et donc } 2n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k \times 2^{k-1+1}$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k \times 2^k \times (-1)^{n-k} = 2n$