

Exo Bilan matrices - Corrigé

1- Diagonalisation

a) On réalise un pivot de Gauss. On a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

La matrice P est de rang 3 donc bien inversible.

On continue

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow -L_1 - 2L_2$$

D'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $D = P^{-1}AP$

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On a $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 2, 2)$

c) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

Initialisation: Pour $n=0$, on a $A^0 = I_3$ et $D^0 = I_3$ donc $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

Ainsi, on a bien $A^0 = PD^0P^{-1}$.

Hérédité: Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = PD^nP^{-1}$.

Or $D = P^{-1}AP$ donc $A = PDP^{-1}$. Ainsi :

Alors $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}A$ par hypothèse de réc.

$$A^{n+1} = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1}$$

$$= PD^nI_3D^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

D'où l'hérédité.

On a bien montré par principe de récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, comme $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$: $A^n = P \times (D^n P^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2^n & 2^n & -2^n \\ 0 & 2^n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

d) D est une matrice diagonale qui n'a pas de 0 sur la diagonale : elle est donc inversible d'inverse $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Ainsi, $A = PDP^{-1}$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

e) On a $A = PDP^{-1}$, donc $A^{-1} = (P^{-1})^{-1} D^{-1} P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$

$$\text{Or } D^{-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc}$$

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

2. Binôme de Newton.

$$\text{a) } B = A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ donc } B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -B$$

b) On a $B^2 = -B$ donc $B^3 = (-B)B = -B^2 = B$ puis $B^4 = B \cdot B = B^2 = -B$, etc.

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, B^n = (-1)^{n+1} B$.

① Pour $n=1$, on a $B^1 = B$ et $(-1)^{1+1} B = (-1)^2 B = 1B = B$. D'où : $B^1 = (-1)^{1+1} B$.

② Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^n = (-1)^{n+1} B$. Alors :

$$B^{n+1} = B^n \cdot B = (-1)^{n+1} B \cdot B = (-1)^{n+1} B^2 = (-1)^{n+1} (-B) = (-1)^{n+2} B.$$

D'où l'hérédité et le résultat.

$$\text{D'où : } \forall n \in \mathbb{N} : B^n = \begin{cases} (-1)^{n+1} B & \text{si } n \geq 1 \\ I_3 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $A^n = (B + 2I_3)^n$. Or B et $2I_3$ commutent, donc selon le

binôme de Newton :

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k$$

$$= \binom{n}{0} 2^{n-0} I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^{k+1} B$$

$$= 2^n I_3 - \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} \right) B$$

$$= 2^n I_3 - ((-1+2)^n - \binom{n}{0} (-1)^0 2^{n-0}) B = 2^n I_3 - (1-2^n) B$$

Finalement, on a: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = 2^n (I_3 + B) - B$$

$$= 2^n \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^n & 2-2^{n+1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 2^n-1 & 2-2^n \end{pmatrix}$$

3. "Polynôme annulateur"

a) On a $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ donc $A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 7-9+2 & 3-3 & -6+6 \\ 0 & 2-6+2 & 0 \\ 3-3 & 3-3 & -2+2 \end{pmatrix} = O_3$

b) On a $A^2 - 3A = -2I_3$, donc $A \left(\frac{1}{-2} (A - 3I_3) \right) = I_3$

Ainsi, A est bien inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{-1}{2} (A - 3I_3) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

c) On montre par récurrence la propriété P_n définie par: $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n : " $\exists a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $A^n = a_n A + b_n I_3$ ".

Initialisation: Pour $n=0$, on a $A^0 = I_3 = 0A + 1I_3$, donc $a_0=0$ et $b_0=1$ conviennent: P_0 est bien vraie.

Hérédité: Fixons $n \in \mathbb{N}$ telle que P_n est vraie. On dispose donc de $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$. Mais alors: $A^{n+1} = A^n \times A$

$$= (a_n A + b_n I_3) A = a_n A^2 + b_n A$$

$$= a_n (3A - 2I_3) + b_n A$$

$$= (3a_n + b_n) A - 2a_n I_3$$

Donc $a_{n+1} = 3a_n + b_n \in \mathbb{R}$ et $b_{n+1} = -2a_n \in \mathbb{R}$ conviennent: P_{n+1} est encore vraie.

D'où l'hérédité, et donc P_n est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

d) On a $\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}$ et: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = -2a_n \end{cases}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors $a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_{n+1} - 2a_n$. C'est vrai pour tout rang $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien récurrente linéaire d'ordre 2.

Soit $(E_c) : x^2 - 3x + 2 = 0$ l'équation caractéristique associée. Son discriminant est $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$, donc (E_c) a 2 solutions réelles distinctes, données par $q_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$, donc $q_1 = 1$ et $q_2 = 2$.

On sait donc qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda \times 1^n + \mu \times 2^n = \lambda + \mu \times 2^n$.

Mais alors $a_0 = \lambda + \mu$ et $a_1 = \lambda + 2\mu$. Or $a_0 = 0$ et $a_1 = 3a_0 + b_0 = 1$.

On résout alors :
$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + 2\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu = -1 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = -1 + 2^n$

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = a_{n+1} - 3a_n = -1 + 2^{n+1} + 3 - 3 \times 2^n = 2 - 2^n$

e) Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = a_n A + b_n I_3$

$$= (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3 = \begin{pmatrix} 3(2^n - 1) & 2^n - 1 & -2^n + 2 \\ 0 & 2^n - 2 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 0 \end{pmatrix} + (2 - 2^n)I_3$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n - 1 & 2^n - 1 & 2 - 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{pmatrix}$$

* + difficile

f) $\forall n \in \mathbb{N}, A^{-n} = (A^{-1})^n = \left(-\frac{1}{2}(A - 3I_3)\right)^n$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n} (A - 3I_3)^n = \frac{-1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k (-3)^{n-k} I_3^{n-k}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-3)^{n-k} A^k$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-3)^{n-k} (2^k - 1) A + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-3)^{n-k} (2 - 2^k) I_3 \right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n} \left[(-3+2)^n - (-3+1)^n \right] A + \left[2(-3+1)^n - (-3+2)^n \right] I_3$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n} \left[(A - 3I_3)^n A + (2 - 2^n - (-1)^n) I_3 \right]$$

$$= \frac{1}{2^n} A - A + 2I_3 - \frac{1}{2^n} I_3 = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3$$

La relation de la question e) est donc encore vraie pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$!