TD Proba - Correction partielle

3] On note J : « être vacciné contre la fièvre jaune » et
D : « être vacciné contre la diphtérie ».

On sait que $\mathbb{P}(J)=0{,}45$, $\mathbb{P}(D)=0{,}6$ et $\mathbb{P}(J\cap D)=0{,}3$.

Alors $\mathbb{P}(\overline{J}\cap\overline{D})=\mathbb{P}(\overline{J\cup D})=1-\mathbb{P}(J\cup D)$

$$=1-(\mathbb{P}(J)+\mathbb{P}(D)-\mathbb{P}(J\cap D))$$
$$=1-0{,}45-0{,}6+0{,}3=0{,}25.$$

Un individu choisi au hasard a donc une chance sur 4 de n'être vacciné contre aucune des deux maladies.

5] **1.** Si $\mathbb{P}(C)=0{,}8$, alors $\mathbb{P}(\{4\})=\mathbb{P}(\overline{C})=1-\mathbb{P}(C)=0{,}2$.

Mais alors $\mathbb{P}(\{1\})=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(\{4\})=0{,}6-0{,}2=0{,}4$, et $\mathbb{P}(\{2\})=0{,}7-0{,}2=0{,}5$.

On obtient $\mathbb{P}(\{1,2,4\})=0{,}4+0{,}5+0{,}2=1{,}1>1$: c'est absurde.

Ainsi, une telle probabilité sur $[\![1,4]\!]$ ne peut pas exister.

2. On cherche $a,b,c,d\in\mathbb{R}_+$ et $\alpha\in\mathbb{R}_+$ tels que :
$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ a+d=\alpha \\ b+d=\alpha \\ a+b+c=\alpha \end{cases}$$
où α représente $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)$; $a=\mathbb{P}(\{1\})$; $b=\mathbb{P}(\{2\})$; $c=\mathbb{P}(\{3\})$ et $d=\mathbb{P}(\{4\})$.

Or
$$\begin{cases} a+d=\alpha \\ b+c=1-\alpha \\ b+d=\alpha \\ b+c-d=\alpha-\alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+d=\alpha \\ b+c=1-\alpha \\ -c+d=2\alpha-1 \\ -d=\alpha-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=1-\alpha \\ c=d+1-2\alpha=2-3\alpha \\ b=1-\alpha-c=2\alpha-1 \\ a=\alpha-d=2\alpha-1. \end{cases}$$

Comme $a,b,c,d,\alpha\in\mathbb{R}_+$, on doit avoir : $\alpha\in[0,\frac{1}{2}]$

Et tout choix de $\alpha\in[0,\frac{1}{2}]$ donne des valeurs convenables pour a,b,c,d !

Par le résultat de caractérisation des probabilités finies, il existe bien une probabilité convenable, et il en existe même une infinité (pour tout choix de $\alpha\in[0,\frac{1}{2}]$).

6] **1.a)** $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$.

b) $\mathbb{P}(A\cup B\cup C)=\mathbb{P}((A\cup B)\cup C)=\mathbb{P}(A\cup B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}((A\cup B)\cap C)$
$$=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}((A\cap C)\cup(B\cap C))$$
$$=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-(\mathbb{P}(A\cap C)+\mathbb{P}(B\cap C)-\mathbb{P}(A\cap C\cap B\cap C))$$
$$\boxed{=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}$$

2. On a une probabilité uniforme sur $[\![1,6]\!]^3$. $A=\{(1,1,1),(2,2,2),\dots,(6,6,6)\}$,

$B=([\![1,6]\!]\setminus\{3\})^3$ et $C=\{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}$.

Ainsi : $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$. $\quad \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{216-125}{216} = \frac{91}{216}$

et $\mathbb{P}(C) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$.

De plus, $B \cap C = A \cap C = \emptyset$, et $A \cap B = \{(3,3,3)\}$, donc $\mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 0$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{216}$.

Finalement : $A \cap B \cap C = \emptyset$. D'où :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \frac{1}{36} + \frac{91}{216} + \frac{1}{72} - \frac{1}{216} - 0 - 0 + 0 = \frac{6+91+3-1}{216} = \frac{99}{216} = \boxed{\frac{11}{24}}$$

La probabilité qu'au moins un des 3 événements soit réalisé vaut $\frac{11}{24}$.

9] $\Omega = [\![1, n]\!]^5$ et la probabilité est uniforme. $\mathrm{Card}(\Omega) = n^5$

a) A : « on tire 5 jetons différents ». $\mathrm{Card}(A) = \binom{n}{5} \times 5! = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

puisqu'on a des choix avec ordre et sans répétition.

D'où $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{n}{5} 5!}{n^5} = \frac{n!}{n^5 (n-5)!}$

b) B : « on tire une suite strictement décroissante ». $\mathrm{Card}(B) = \binom{n}{5}$ donc

$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{n^5} \times \binom{n}{5}$.

c) C : « on voit exactement 2 numéros »

$\mathrm{Card}(C) = \binom{n}{2} \times (2^5 - 2) = 30 \times \frac{n(n-1)}{2} = 15n(n-1)$.

D'où $\mathbb{P}(C) = \frac{15n(n-1)}{n^5} = \frac{15(n-1)}{n^4}$.

d) D : « on voit au moins 3 numéros ».

$\mathrm{Card}(\overline{D}) = \mathrm{Card}(C) + \mathrm{Card}(\text{« exactement 1 numéro »})$

$= 15n(n-1) + n$

Donc $\mathbb{P}(D) = \frac{n^5 - 15n(n-1) - n}{n^5} = 1 - \frac{15(n-1)}{n^4} - \frac{1}{n^4} = \boxed{1 - \frac{15n-14}{n^4}}$.

12] 1. $\mathrm{Card}(\Omega) = 20^3 = \boxed{8000}$

a) $\mathrm{Card}(A) = 3! \times 10 \times 6 \times 4 = 36 \times 40$. $\quad \mathbb{P}(A) = \frac{9 \times 4 \times 4 \times 10}{20^3} = \frac{9}{5 \times 5 \times 2} = \frac{9}{50}$

b) $\mathrm{Card}(B) = 10^3 + 6^3 + 4^3 = 1280$. $\quad \mathbb{P}(B) = \frac{1280}{8000} = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$.

c) $\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = \frac{50-9-8}{50} = \frac{33}{50}$

2. $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{20}{3} = \frac{20 \times 19 \times 18}{6} = 20 \times 57 = \boxed{1140}$

a) $\mathrm{Card}(A) = 10 \times 6 \times 4 = 240$; $\mathbb{P}(A) = \frac{24}{114} = \frac{12}{57} = \frac{4}{19}$

b) $\mathrm{Card}(B) = \binom{10}{3} + \binom{6}{3} + \binom{4}{3} = 120 + 20 + 4 = 144$; $\mathbb{P}(B) = \frac{144}{1140} = \frac{36}{285} = \frac{12}{95}$

c) $\mathbb{P}(C) = \frac{95-20-12}{95} = \frac{63}{95}$

14 On note B_i (resp. V_i) l'événement : « tirer une boule bleue (resp. verte) au i-ième tirage ». (B_i, V_i) est toujours un système complet d'événements.

1. $P((B_1\cap V_2)\sqcup(B_2\cap V_1)) = P(B_1\cap V_2) + P(B_2\cap V_1)$ (événements incompatibles)

$$= P(B_1)P_{B_1}(V_2) + P(V_1)P_{V_1}(B_2)$$

$$= \frac{b}{b+v}\times\frac{v}{b+v-1} + \frac{v}{b+v}\times\frac{b}{b+v-1} = \boxed{\frac{2bv}{(b+v)(b+v-1)}}$$

2. On procède de même, mais $\boxed{P_{B_1}(V_2) = \frac{v}{b+v+2}}$.

Alors $P((B_1\cap V_2)\sqcup(B_2\cap V_1)) = \frac{b}{b+v}\times\frac{v}{b+v+2} + \frac{v}{b+v}\times\frac{b}{b+v-1} = \frac{bv}{b+v}\left(\frac{1}{b+v+2}+\frac{1}{b+v-1}\right)$

$$= \boxed{\frac{bv\,(2(b+v)+1)}{(b+v)(b+v+2)(b+v-1)}}$$

3. a) $P_{B_1\cap\dots\cap B_{k-1}}(B_k) = \frac{b}{b+v}$ puisqu'on remet les boules à chaque fois.

b) $P(B_1\cap\dots\cap B_k) = P(B_1)\,P_{B_1}(B_2)\,P_{B_1\cap B_2}(B_3)\dots P_{B_1\cap\dots\cap B_{k-1}}(B_k)$ d'après les probas composées.

$= \frac{b}{b+v}\times\frac{b}{b+v}\times\dots\times\frac{b}{b+v}$ d'après la question précédente

$$= \left(\frac{b}{b+v}\right)^k$$

4. a) Ici, $P_{B_1\cap\dots\cap B_{k-1}}(B_k) = \frac{b-(k-1)}{b+v-(k-1)} = \frac{b-k+1}{b+v-k+1}$.

b) D'où $P(B_1\cap\dots\cap B_k) = \frac{b}{b+v}\times\frac{b-1}{b+v-1}\times\dots\times\frac{b-k+1}{b+v-k+1} = \frac{b!\,(b+v-k)!}{(b-k)!\,(b+v)!}$

$$= \frac{b!}{k!(b-k)!}\times\frac{k!(b+v-k)!}{(b+v)!} = \frac{\binom{b}{k}}{\binom{b+v}{k}}$$

---

18 On note V et M les événements :
V : « être vacciné » et M : « être malade ».

On sait que $P_V(M) = \frac{1}{12}$ et $P_M(V) = \frac{1}{5}$ et $P(V) = \frac{1}{4}$.

On cherche $P_{\bar V}(M) = \frac{P(M\cap\bar V)}{P(\bar V)}$.

D'après la formule de Bayes : $P_V(M) = \frac{P_M(V)P(M)}{P(V)}$ donc $P(M) = \frac{P(V)P_V(M)}{P_M(V)} = \frac{1/4\times 1/12}{1/5} = \frac{5}{48}$

De plus, $P(M\cap\bar V) = P(M) - P(M\cap V) = \frac{5}{48} - P(V)P_V(M) = \frac{5}{48} - \frac{1}{4}\frac{1}{12} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$.

Enfin, $P(\bar{V}) = 1 - P(V) = \frac{3}{4}$. D'où :

$$P_{\bar{V}}(M) = \frac{1/12}{3/4} = \frac{1}{12} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{9}.$$

Un non vacciné a donc une chance sur 9 de tomber malade !

---

19 On note A, B, C, les évènements "choisir la 1^{e} (2^{e}/3^{e}) pièce", et P_i (F_i) les évènements : "obtenir Pile (Face) au i-ème lancer".

On a $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$ (probabilité uniforme sur le choix de la pièce), et (A, B, C) est un système complet d'évènements.

1. $P_A(P_1 \cap P_2 \cap F_3) = 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}9 = \frac{9}{1000}$. $P_B(P_1 \cap P_2 \cap F_3) = 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = \frac{96}{1000}$, et

$P_C(P_1 \cap P_2 \cap F_3) = 0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = \frac{144}{1000}$.

Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(P_1 \cap P_2 \cap F_3) = P(A) \times \frac{9}{1000} + P(B) \times \frac{96}{1000} \times P(C) \times \frac{144}{1000} = \frac{1}{3} \times \frac{249}{1000} = \frac{83}{1000}.$$

Ainsi : $P_{P_1 \cap P_2 \cap F_3}(A) = \frac{P_A(P_1 \cap P_2 \cap F_3) \times P(A)}{P(P_1 \cap P_2 \cap F_3)}$ d'après la formule de Bayes

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{9}{1000}}{\frac{83}{1000}} = \frac{9}{3 \times 83} = \boxed{\frac{3}{83}}$$

2. De même : $P_A((P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3)) = \frac{3 \times 9}{1000}$, $P_B(\text{"2P, 1F"}) = \frac{3 \times 96}{1000}$

et $P_C(\text{"2P, 1F"}) = \frac{3 \times 144}{1000}$, donc $P(\text{"2P, 1F"}) = \frac{249}{1000}$ et

$$P_{\text{"2P,1F"}}(A) = \frac{\frac{3 \times 9}{1000} \times \frac{1}{3}}{\frac{249}{1000}} = \frac{9}{249} = \boxed{\frac{3}{83}}$$ C'est la même probabilité !

---

20 **2.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = p a_n + (1-p)(1-a_n) = (2p-1)a_n + 1 - p$

$\ell = (2p-1)\ell + 1 - p \iff \ell = \frac{1-p}{2-2p} = \frac{1}{2}$. $\boxed{\begin{cases} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (2p-1)^n \\ b_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n \end{cases}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. $a_n, b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$, donc sur le long terme, on a à peu près autant de chance de trouver l'abeille sur la fleur A que sur la fleur B.

3\. a) $\mathbb{P}(F_1) = \frac{2p+1}{4}$ (même calcul qu'à la question précédente).

b) $\mathbb{P}_{E_1}(E_n) = \mathbb{P}_{E_1}(F_1)$ d'après la stratégie 2

$= \frac{1}{2}$.

De même, $\mathbb{P}_{\overline{E_1}}(E_n) = \mathbb{P}_{\overline{E_1}}(\overline{F_1}) = 1-p$. D'où ; d'après les probabilités totales :

$$\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(E_1)\,\mathbb{P}_{E_1}(E_n) + \mathbb{P}(\overline{E_1})\,\mathbb{P}_{\overline{E_1}}(E_n) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times(1-p) = \frac{1+2-2p}{4} = \frac{3-2p}{4}$$

c) Pour tout $n \geq 2$, on a alors

$$\mathbb{P}(F_n) = p + \left(\frac{1}{2}-p\right)\frac{3-2p}{4} = \frac{8p}{8} + \frac{(1-2p)(3-2p)}{8} = \frac{8p+3-2p-6p+4p^2}{8} = \frac{4p^2+3}{8}$$

4\. $\forall p \in \mathbb{R}$, on a $\frac{2p+1}{4} \leq \frac{4p^2+3}{8} \Longleftrightarrow 4p+2 \leq 4p^2+3 \Longleftrightarrow 4p^2-4p+1 \geq 0$

$\Longleftrightarrow (2p-1)^2 \geq 0$. C'est toujours vrai.

Ainsi, la stratégie 2 permet d'obtenir Face avec plus grande probabilité : elle est $\boxed{\text{meilleure}}$.

5\. a) $\mathbb{P}(F_1) = \frac{2p+1}{4}$ $\mathbb{P}(F_2) = \frac{4p^2+3}{8}$.

b) $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}(E_{n+1}) = \mathbb{P}(E_n)\,\mathbb{P}_{E_n}(E_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{E_n})\,\mathbb{P}_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$

$= \mathbb{P}(E_n)\,\mathbb{P}_{E_n}(F_n) + (1-\mathbb{P}(E_n))\,\mathbb{P}_{\overline{E_n}}(\overline{F_n}) = \mathbb{P}(E_n)\times\frac{1}{2} + (1-\mathbb{P}(E_n))(1-p)$

$$\boxed{= \mathbb{P}(E_n)\left(p-\frac{1}{2}\right) + 1-p}$$

$a = p - \frac{1}{2} \in \,]0,1[$ et $b = 1-p \in \mathbb{R}$ conviennent !

c) On a une suite arithmético-géométrique. On sait qu'alors

$\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}(E_n) = \frac{b}{1-a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{1-a}\right)\times a^{n-1}$ $\boxed{= \frac{2b+(1-a-2b)a^{n-1}}{2(1-a)}}$

d) En remplaçant a et b par leurs valeurs : $2(1-a) = 3-2p$ et $1-a-2b = p-\frac{1}{2} = \frac{2p-1}{2} = a$

Donc $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}(E_n) = \frac{2-2p+\left(\frac{2p-1}{2}\right)^n}{3-2p}$ donc $\mathbb{P}(F_n) = \frac{1-2p}{2}\mathbb{P}(E_n) + p$

$$\mathbb{P}(F_n) = \frac{(1-2p)(2-2p)}{2(3-2p)} + p + \frac{1}{3-2p}\times\left(-\left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{2\cancel{-2p-4p+4p^2+2p(3-2p)}}{2(3-2p)} - \frac{1}{3-2p}\left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\boxed{= \frac{1}{3-2p}\left(1-\left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1}\right)}$$

6\. a) On montre que $\forall p \in [\frac{1}{2}, 1]$, $(4p^2+3)(3-2p)-8 \leq 0$, en étudiant $f(x) = -8x^3+12x^2-6x+1$

24) On note R_1 (resp. R_2, R_3) les événements : "la longueur (resp. largeur / hauteur) est refusée ». On sait que ces événements sont indépendants. Alors

$$\mathbb{P}(R_1 \cup R_2 \cup R_3) = \mathbb{P}(\overline{\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \overline{R_3}}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{R_1})\mathbb{P}(\overline{R_2})\mathbb{P}(\overline{R_3}) \text{ par indépendance}$$

$$= 1 - (1-\mathbb{P}(R_1))(1-\mathbb{P}(R_2))(1-\mathbb{P}(R_3))$$

$$= 1 - 0{,}94 \times 0{,}96 \times 0{,}92 \simeq 0{,}17$$

La probabilité qu'un pavé soit refusé est d'environ 17 %.

---

25) On note A_i l'événement : "obtenir un 6 au i-ème lancer".

1. $$p_n = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_i}) \text{ par indépendance des lancers}$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \frac{5}{6} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

2. $$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq \frac{1}{2} \iff \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \frac{1}{2} \iff n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ par croissance de ln}$$

$$\iff n \geq \frac{\ln(1/2)}{\ln(5/6)} \text{ puisque } \ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$$

$$\boxed{\iff n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(6) - \ln(5)}} \simeq 3{,}8$$

$$\iff n \geq 4 \text{ puisque } n \text{ est entier.}$$

À partir de 4 lancers, on a plus d'une chance sur 2 d'obtenir au moins un 6 !

---

28) 1. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(E_n, \overline{E_n})$. On sait que $\mathbb{P}_{E_n}(F_n) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}_{\overline{E_n}}(F_n) = p$.

Alors $$\mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}(E_n)\mathbb{P}_{E_n}(F_n) + \mathbb{P}(\overline{E_n})\mathbb{P}_{\overline{E_n}}(F_n)$$

$$= \mathbb{P}(E_n) \times \frac{1}{2} + (1 - \mathbb{P}(E_n)) \times p = \mathbb{P}(E_n)\left(\frac{1}{2} - p\right) + p$$

$$\boxed{= p + \left(\frac{1}{2} - p\right)\mathbb{P}(E_n)}.$$

2. Dans cette stratégie, on a $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{2}$. D'où :

$$\mathbb{P}(F_n) = p + \left(\frac{1}{2} - p\right)\frac{1}{2} = \frac{4p}{4} + \frac{1-2p}{4} = \frac{2p+1}{4}.$$ On a bien : $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(F_n) = \frac{2p+1}{4}}.$$