DM Toussaint

1. Faire deux ou trois études de fonctions parmi celles non faites en classe de l'exercice 14 du TD4. Il est recommandé d'en faire plus pour s'entraîner !

---

2. Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on pose $Z = \dfrac{z+1}{\overline{z}+1}$.

1. Déterminer $|Z|$ par un calcul *simple*.
2. Mettre Z sous forme algébrique.
3. En déduire une condition nécessaires et suffisantes sur x, y pour que $Z \in \mathbb{R}$.
4. Représenter dans le plan complexe l'ensemble des nombres complexes z qui vérifient $\dfrac{z+1}{\overline{z}+1} \in \mathbb{R}$.
5. Représenter de même l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{z+1}{\overline{z}+1} \in i\mathbb{R}$.

3.

1. **Préliminaires.**
   a) Rappeler quel type de raisonnement est utilisé pour montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Pour rappel, cette preuve est extrêmement classique et est dans le cours (Ch0).
   b) Montrer qu'une somme de deux nombres rationnels est encore un nombre rationnel.
   On admet qu'il en va de même pour les produits et les quotients.
2. On considère $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & a + b\sqrt{2} \end{array} \right.$ Déterminer $f(0,-1)$, $f(\frac{2}{3},0)$, puis $f(\mathbb{Q} \times \{0\})$.
3. **Propriétés de f.**
   a) Soient $(a,b), (a',b') \in \mathbb{Q}^2$. On suppose que $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$. Exprimer $\sqrt{2}$ en fonction de a, b, a', b'.
   b) En déduire que f est injective.
   c) Montrer par l'absurde que $\sqrt{3}$ n'admet aucun antécédent par f. On pensera à élever au carré et à utiliser l'irrationalité de $\sqrt{2}$ pour obtenir une contradiction.
   d) f est-elle bijective ?
4. On note $E = f(\mathbb{Q}^2)$ l'image directe de $\mathbb{Q}^2$ par l'application f. Donner une écriture ensembliste de E.
5. **La fin est facultative mais intéressante.** On considère l'application $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{1}_E(x) \end{array} \right.$.
   a) Montrer que g est 1-périodique, puis que g est $\sqrt{2}$-périodique.
   b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, g est x-périodique.
   c) g admet-elle une plus petite période strictement positive ?
   d) Déterminer l'ensemble des périodes de la fonction g. Qu'en pensez-vous ?
